第四章　复变函数项级数

第二讲 幂级数

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1. 幂级数的收敛性
2. 幂级数的收敛圆与收敛半径
3. 幂级数的性质

主要内容

1. 幂级数的收敛性
2. 幂级数的收敛圆与收敛半径
3. 幂级数的性质

1 幂级数的收敛性

幂级数的定义

当 $f_n(z)=c_n(z-a)^n$ 其中,$a,c_n\in C$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

定理1（Abel定理）

（1）若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_1 \neq 0$ 处收敛，

则当 $|z| < |z_1|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛；

（2）若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 z_2 处发散，

则当 $|z| > |z_2|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散.

定理1（Abel定理）

（1）若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_1 \neq 0$ 处收敛，

则当 $|z| < |z_1|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛；

证明 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 z_1 处收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n {z_1}^n$ 是收敛的.

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n {z_1}^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0, \mathrm{s.t}\ \left|c_n z_1^n\right| \leq M.$

$$\left|c_n z^n\right| = \left|c_n {z_1}^n\right| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq M q^n, \left(q = \left|\frac{z}{z_1}\right|\right).$$ 故 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛.

定理1 （Abel定理）

（2）若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 z_2 处发散，

则当 $|z| > |z_2|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散.

假设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 z_2 处发散，而当 $|z| > |z_2|$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛.

说明 z_2 是收敛域内的点，这与级数在 z_2 处发散相矛盾.

故假设不成立.

主要内容

1 幂级数的收敛性

2 幂级数的收敛圆与收敛半径

3 幂级数的性质

2 幂级数的收敛圆与收敛半径

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛情况无外乎有三种:

（1） 级数在复平面内处处绝对收敛.

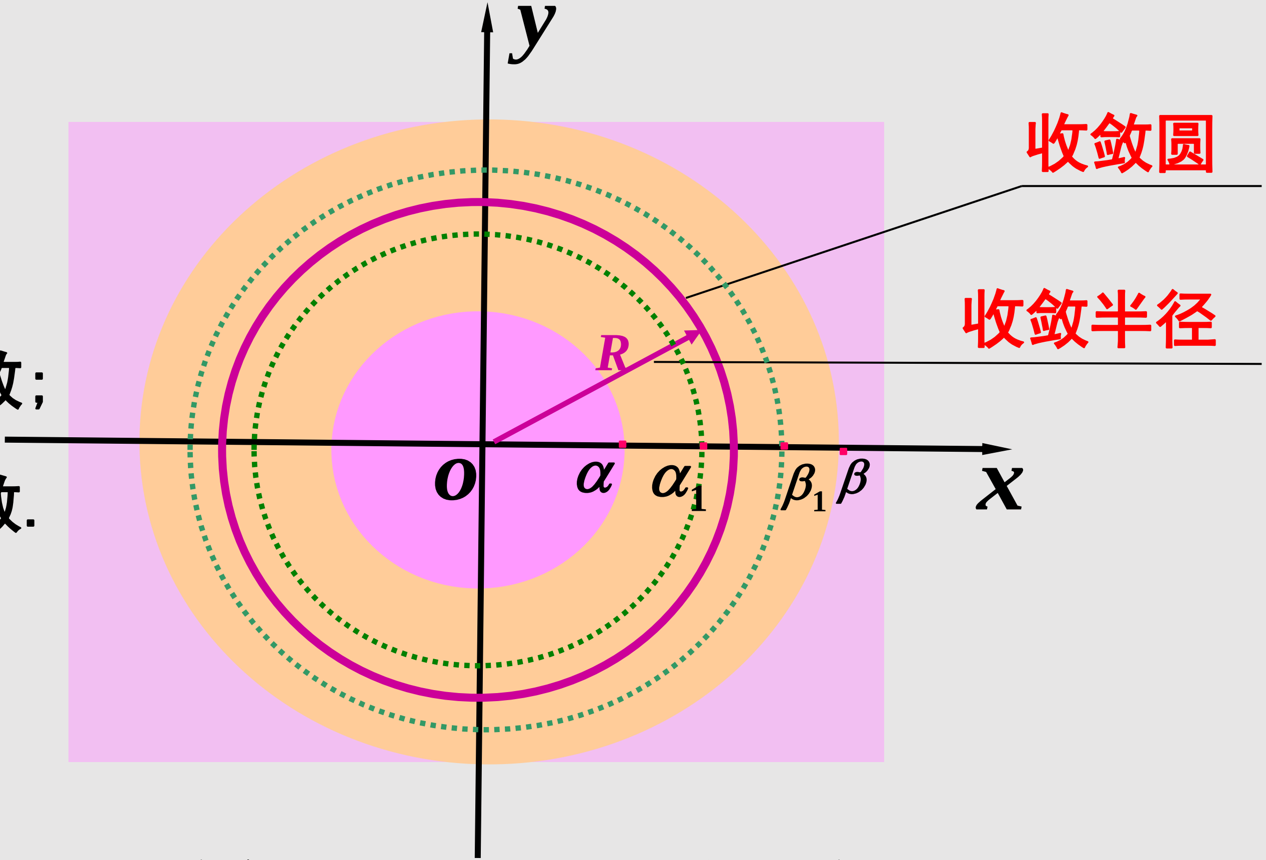
（2）级数在仅在原点收敛.

（3）既存在使级数收敛的点， 又存在使级数发散的点.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

设 $z=\alpha$ 时，级数收敛；

$z=\beta$ 时，级数发散.



幂级数的收敛范围是以原点为中心的圆域.

收敛圆： 如果存在一个圆周 $C_R: |z| = R$，当 $|z| < R$ 时，使得

$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 收敛，当 $|z| > R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 发散，则圆周 C_R

称为幂级数的收敛圆， R 称为**收敛半径**.

$$0 < R < +\infty, \quad 0, \quad +\infty$$

例如，由**等比级数**知，

当 $|z| < 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 绝对收敛； 当 $|z| \geq 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛域半径为1.

定理4.8 幂级数收敛半径的计算方法（比值法和根值法）

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，如果满足下列条件之一：

$(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$； $(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$ 则

(1) 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时，收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$；

(2) 当 $\lambda = +\infty$ 时，收敛半径 $R = 0$；

(3) 当 $\lambda = 0$ 时，收敛半径 $R = +\infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda;$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R}$$

证明 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||z| = \lambda|z| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\lambda},$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛.

$$|z| > \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|c_{n+1}z^{n+1}\right| = \infty$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_{n+1}z^{n+1} \neq 0.$ $\quad \therefore \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散. 故 $R = \frac{1}{\lambda}$.

例1 求下列幂级数的收敛半径.

$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ （讨论圆周上的收敛情况）

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$（讨论$z=0$,$z=2$的收敛情况）

解 $(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=1\Rightarrow R=1.$

$|z|=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$在$|z|=1$处处收敛.

例1 求下列幂级数的收敛半径.

$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ （讨论圆周上的收敛情况）

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$（讨论$z=0$,$z=2$的收敛情况）

解 $(2)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\Rightarrow R=1.$

$z=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛； $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

在收敛圆周上，既有收敛点又有发散点.

例2 求下列幂级数的收敛半径.

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n; \quad (2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}; \quad (3)\sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n.$$

解 $$(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = 0.$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \infty \Rightarrow R = \infty.$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-2n-1}} = \frac{1}{e} \Rightarrow R = \frac{1}{e}.$$

主要内容

3 幂级数的性质

幂级数的运算性质

(1) 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，

则在 $|z| < R = \min(R_1, R_2)$ 内，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0\right) z^n.$$

(2) 设级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 r.

如果在 $|z|<R$内, 函数 $g(z)$ 解析, 并且$|g(z)|<r$,

则当 $|z|<R$ 时, $f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}c_n[g(z)]^n$. （变量替换）

例3 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表示成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的幂级数，其中a与b是不相等的复常数．

解
$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a-(b-a)} = \frac{-1}{b-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$
$$= \frac{-1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n.$$

幂级数的分析性质

$$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,|z-z_0|<R,$$

（1）$s(z)$是收敛圆内的连续函数；

（2）$s(z)$在收敛圆内为解析函数，并且可以逐项求导；

$$s'(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(z-a)^{n-1}$$

（3）$s(z)$在收敛圆内可积，并且可以逐项积分.

$$\int_{z_0}^{z}s(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

例4 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}\right|=\frac{1}{2}$, $|z|<\frac{1}{2}$.

$$s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$$

$$s_1=\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^{n-1}=\frac{2}{1-2z},|z|<\frac{1}{2}.$$

$$s_2=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z},\ |z|<1.\quad s(z)=\frac{2}{1-2z}+\frac{1}{1-z},|z|<\frac{1}{2}.$$

例5 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1,$

设$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, |z|<1.$

$$\int_0^z s(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}$$

$$s(z)=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1-z+z}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}, |z|<1.$$