

# 离散数学概论

## 第三章 集合与矩阵

课程QQ号: **819392514**

金耀 软件工程系

fool1025@163.com

13857104418

# 谓词逻辑推理方法

❖ 谓词是命题的扩张，首先运用谓词公式中的量词消去规则，使之转化为命题公式，然后用命题公式的推理规则进行推理，最后再将量词添加上去。

消去量词



命题推理



添加量词

## 谓词逻辑特有的推理规则

### ❖ 全称实例 (Universal Instantiation, UI)

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$$

### ❖ 全称推广 (Universal Generalization, UG)

$$P(c), \text{任意 } c \Rightarrow \forall x P(x)$$

### ❖ 存在实例 (Existential Instantiation, EI)

$$\exists x P(x) \Rightarrow P(c), \text{对某个元素 } c$$

### ❖ 存在推广 (Existential Generalization, EG)

$$P(c), \text{对某个元素 } c \Rightarrow \exists x P(x)$$

## 注意要点

❖ 不能在量词的作用域内使用等价式和蕴含式

错例  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$

❖ 在同一证明中，若既要使用存在实例，又要使用全称实例，则先用存在实例，后用全称实例。

例：            论域：我们班学生

$A(x)$ :  $x$ 是大学生,  $B(x)$ : $x$ 是女生

$(\forall x) A(x) \quad (\exists x) B(x)$

# 第三章 集合与矩阵

## 3.1 集合

## 3.2 矩阵



# 本讲主要内容

- 基本概念
- 集合间关系
- 集合运算
- 集合证明

# 集合定义与表示

**集合** 没有精确的数学定义。

**理解：** 一些离散个体组成的全体。

**组成集合的个体称为它的元素或成员集合的表示。**

**定义：** 有限个元素构成的集合为**有限集合**。其中集合包含元素的个数称为**集合的基**，记作 $|A|$ 。无限个元素构成的集合为**无限集合**。

# 集合定义与表示

## 集合表示法：

❖ **列举法**  $A = \{ a, b, c, d \}$

❖ **描述法**  $B = \{ x / P(x) \}$

$B$  由使得  $P(x)$  为真的  $x$  构成

❖ **定义：** 集合的基为零时，该集合称为空集合，记为  $\emptyset$ .

❖ **定义：** 考虑的所有对象构成的集合称为全集，记为  $E$ .

## 常用数集

$N, Z(\text{Zahlen}), Q(\text{Quotient}), R, C$  分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意  $0$  是自然数.



# 集合与元素

## 元素与集合的关系：隶属关系

属于 $\in$ ，不属于 $\notin$

### 实例

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 1 = 0 \}, A = \{-1, 1\}$$

$$1 \in A, 2 \notin A$$

注意：对于任何集合  $A$  和元素  $x$  (可以是集合)，

$x \in A$  和  $x \notin A$  两者成立其一，且仅成立其一。



# 隶属关系的层次结构

## 例 3.1

$$A = \{ a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\} \}$$

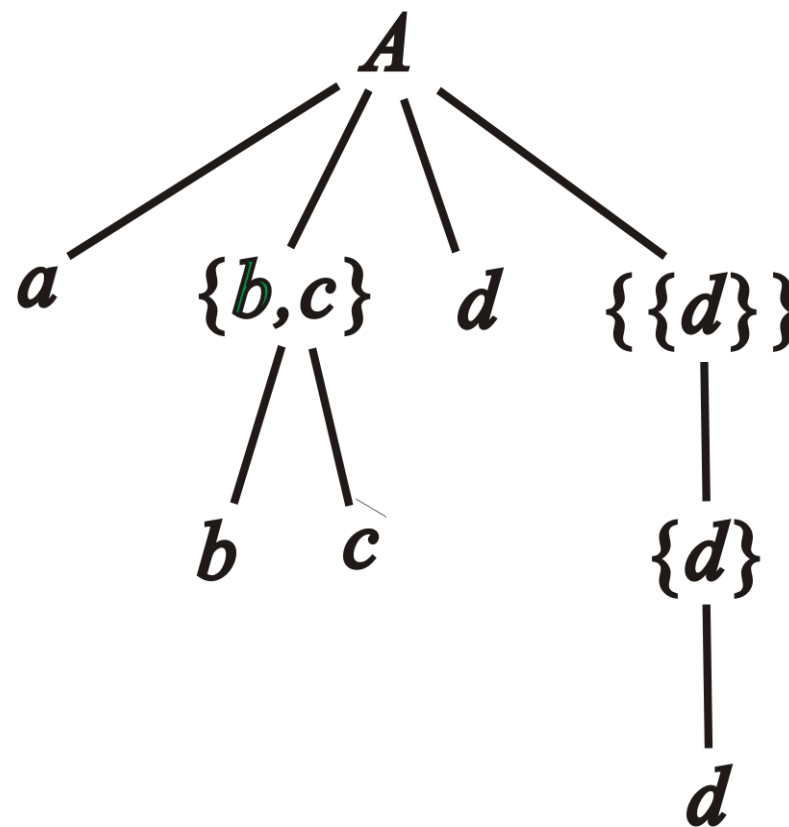
$$\{b, c\} \in A$$

$$b \notin A$$

$$\{\{d\}\} \in A$$

$$\{d\} \notin A$$

$$d \in A$$



# 集合之间的关系

**包含 (子集)**  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

**不包含**  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

**相等**  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

**不相等**  $A \neq B$

**真包含**  $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

**不真包含**  $A \not\subset B$

**思考：**  $\neq$  和  $\not\subset$  的定义

**注意**  $\in$  和  $\subseteq$  是不同层次的问题



# 空集与全集

**定理** 空集是任何集合的子集.

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

**推论** 空集是唯一的.

证: 假设存在  $\emptyset_1$  和  $\emptyset_2$ , 则  $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$  且  $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ , 因此  $\emptyset_1 = \emptyset_2$

**全集**  $E$

**相对性**

在给定问题中, 全集包含任何集合, 即  $\forall A (A \subseteq E)$

# 幂集

**定义**  $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

**实例**

$$P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$$

$$P(\{\emptyset\}) = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$$

$$P(\{1, \{2, 3\}\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\} \}$$

**计数**

如果  $|A| = n$ , 则  $|P(A)| = 2^n$



# 集合的基本运算

## ❖ 集合基本运算的定义

$$\cup \cap - \sim \oplus$$

## ❖ 文氏图 (John Venn)

## ❖ 例题

## ❖ 集合运算的算律

## ❖ 集合包含或恒等式的证明



# 集合基本运算的定义

**并**  $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

**交**  $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

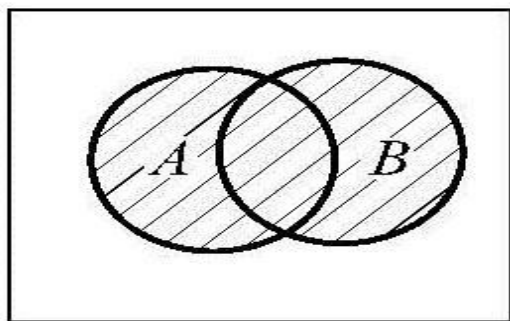
**相对补**  $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

**对称差** 
$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

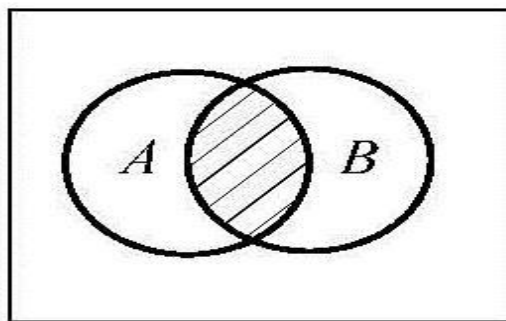
**绝对补**  $\sim A = E - A$



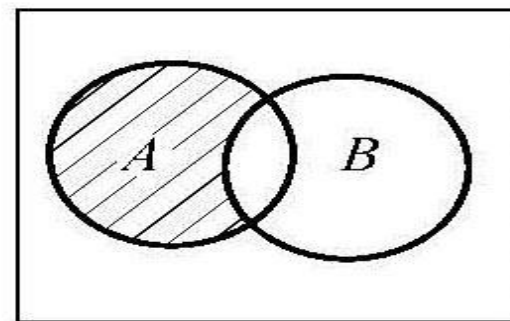
# 文氏图表示



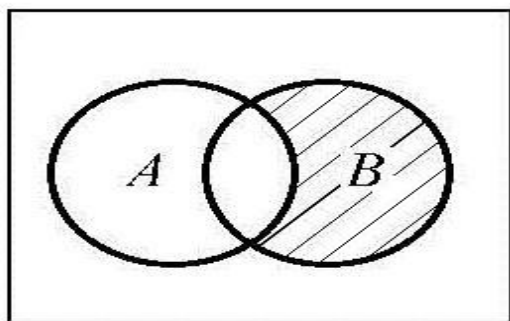
$$A \cup B$$



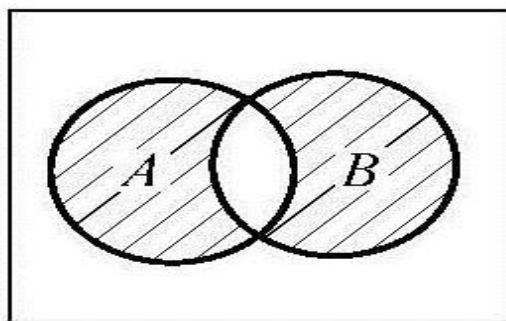
$$A \cap B$$



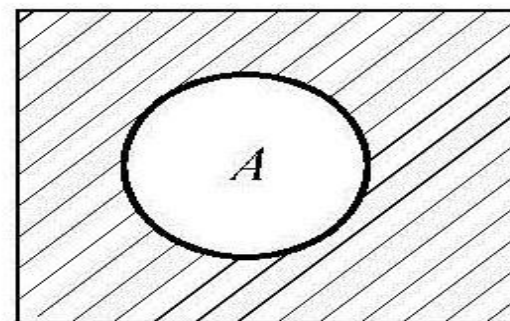
$$A - B$$



$$B - A$$



$$A \oplus B$$



$$\sim A$$



# 关于运算的说明

❖ **运算顺序：**  $\sim$ 和幂集优先，其他由括号确定

❖ **并和交运算可以推广到有穷个集合上，即**

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

❖ **某些重要结果**

$$\emptyset \subseteq A - B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset \quad (\text{后面证明})$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$$

## 关于运算的说明

❖ 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定

❖ 并和交运算可以推广到**有穷**个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

❖ 某些重要结果

$$\emptyset \subseteq A - B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset \quad (\text{后面证明})$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$$

# 例

设 $A_i=[0,1/i)$ ,  $B_i=(0,i)$ ,  $i=1,2,\dots$ ,则

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = [0,1)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0,1)$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = [0,1/n)$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = (0,n)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = (0,+\infty)$$

$$\bigcap_{i=1}^n B_i = (0,1)$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = (0,1)$$

# 例1

**F: 一年级大学生的集合**

**R: 计算机系学生的集合**

**T: 选修离散数学的学生的集合**

**L: 爱好文学学生的集合**

**S: 二年级大学生的集合**

**M: 数学系学生的集合**

**P: 爱好体育运动学生的集合**

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不  
选修离散数学

$$T \subseteq (M \cup R) \cap S$$

$$R \cap S \subseteq T$$

$$(M \cap F) \cap T = \emptyset$$

$$M \subseteq L \cup P$$

$$P \subseteq F \cup S$$

$$S - (M \cup R) \subseteq P$$

## 例2

分别对条件(1)到(5), 确定  $X$  集合与下述那些集合相等。

$$S_1 = \{ 1, 2, \dots, 8, 9 \}, S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}, S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \},$$

$$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}, S_5 = \{ 3, 5 \}$$

(1) 若  $X \cap S_3 = \emptyset$ , 则  $X = S_2$

(2) 若  $X \subseteq S_4$ ,  $X \cap S_2 = \emptyset$ , 则  $X = S_5$

(3) 若  $X \subseteq S_1$ ,  $X \not\subseteq S_3$ , 则  $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若  $X - S_3 = \emptyset$ , 则  $X = S_3, S_5$

(5) 若  $X \subseteq S_3$ ,  $X \not\subseteq S_1$ , 则  $X$  与  $S_1, \dots, S_5$  都不等

# 集合运算的算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

	$\cup$ 与 $\cap$	$\cap$ 与 $\oplus$
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

吸收律的前提： $\cup$ 、 $\cap$ 可交换

## 集合运算的算律（续）

	$-$	$\sim$
<i>D.M</i> 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	$\emptyset$	$E$
补元律	$A\cap\sim A=\emptyset$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\emptyset=\emptyset$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\emptyset=E$	$\sim E=\emptyset$

# 集合包含或相等的证明方法

## ❖ 证明 $X \subseteq Y$

- 命题演算法
- 包含传递法
- 反证法
- 并交运算法

## ❖ 证明 $X=Y$

- 命题演算法
- 等式代入法
- 反证法

以上的  $X, Y$  代表集合公式



## 第一种方法：命题演算法证 $X \subseteq Y$

任取  $x$ ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

例3 证明  $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

任取  $x$

$$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$$

任取  $x$

$$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$$

## 第二种方法：包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合  $T$  满足  $X \subseteq T$  且  $T \subseteq Y$ , 从而有:  $X \subseteq Y$

例4  $A - B \subseteq A \cup B$

证  $A - B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以  $A - B \subseteq A \cup B$



## 第三种方法：反证法证 $X \subseteq Y$

欲证  $X \subseteq Y$ , 假设命题不成立, 必存在  $x$  使得  $x \in X$  且  $x \notin Y$ . 然后推出矛盾.

例6 证明  $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设  $A \cup B \subseteq C$  不成立,

则  $\exists x (x \in A \cup B \wedge x \notin C)$

因此  $x \in A$  或  $x \in B$ , 且  $x \notin C$

若  $x \in A$ , 则与  $A \subseteq C$  矛盾;

若  $x \in B$ , 则与  $B \subseteq C$  矛盾.



## 第四种方法：利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z, X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例7 证明  $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证  $A \cap C \subseteq B \cap C, A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得：

$$\begin{aligned} & (A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C) \\ \Rightarrow & (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C) \\ \Rightarrow & A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C) \\ \Rightarrow & A \cap E \subseteq B \cap E \\ \Rightarrow & A \subseteq B \end{aligned}$$



## 第一种方法：命题演算法证明 $X=Y$

任取  $x$  ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

$$x \in Y \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in X$$

或者

$$x \in X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in Y$$

例8 证明  $A \cup (A \cap B) = A$  (吸收律)

证 任取  $x$ ,

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$



## 第二种方法：等式代入证明 $X=Y$

不断利用集合等值式进行代入化简，最终得到两边相等。

例9 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证（假设交换律、分配律、同一律、零律成立）

$$A \cup (A \cap B)$$

$$= (A \cap E) \cup (A \cap B)$$

同一律

$$= A \cap (E \cup B)$$

分配律

$$= A \cap (B \cup E)$$

交换律

$$= A \cap E$$

零律

$$= A$$

同一律



## 第三种方法：反证法证明 $X=Y$

假设  $X=Y$  不成立，则存在  $x$  使得  $x \in X$  且  $x \notin Y$ ，或者存在  $x$  使得  $x \in Y$  且  $x \notin X$ ，然后推出矛盾。

例10 证明以下等价条件

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

(1)

(2)

(3)

(4)

证明顺序：

$$(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4), (4) \Rightarrow (1)$$



### 第三种方法：反证法证明 $X=Y$

$$(1) \Rightarrow (2) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

显然 $B \subseteq A \cup B$ ，下面证明 $A \cup B \subseteq B$ 。

任取 $x$ ，

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有 $A \cup B \subseteq B$ 。综合上述 (2) 得证。

$$(2) \Rightarrow (3) \quad A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

(将 $A \cup B$ 用 $B$ 代入)





### 第三种方法：反证法证明 $X=Y$

$$(3) \Rightarrow (4) \quad A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

假设 $A - B \neq \emptyset$ , 即 $\exists x \in A - B$ , 那么 $x \in A$ 且 $x \notin B$ . 而

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B.$$

从而与 $A \cap B = A$ 矛盾.

$$(4) \Rightarrow (1) \quad A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$$

假设 $A \subseteq B$ 不成立, 那么

$$\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A - B \neq \emptyset$$

与条件 (4) 矛盾.



## 习题（证明）

$$\diamond (A \cup B) \oplus (A \cup C) = (B \oplus C) - A$$

$$\diamond (A \oplus B) = A \cup B - A \cap B$$

# 三次数学危机

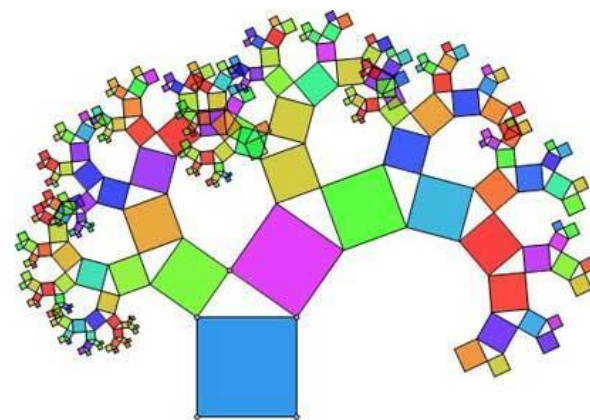
❖ 第一次： $\sqrt{2}$  不能表示为两个整数比

❖ 第二次：贝克莱悖论

❖ 第三次：罗素的集合悖论

# 第一次数学危机（无理数）

- ❖ 发生在公元前5世纪（毕达哥拉斯学派）：当时认为所有的数都能表示为整数比，但突然发现 $\sqrt{2}$ 不能表为整数比。
- ❖ 古希腊的欧多克索斯用几何方法部分解决该危机
- ❖ 19世纪实数理论的建立才彻底解决了该危机



## 第二次数学危机（牛顿的无穷小量）

❖ 瞬时速度： $\frac{\Delta S}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g(\Delta t)$

$$\begin{aligned}\blacksquare \Delta S &= S(t_1) - S(t_0) = \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 \\ &= \frac{1}{2}g[(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2] = \frac{1}{2}g[2t_0\Delta t + (\Delta t)^2]\end{aligned}$$

贝克莱大主教：“无穷小”作为一个量，究竟是不是0？

如果是0，上式左端当 $\Delta t$ 成无穷小后分母为0，就没有意义了。如果不是0，上式右端的 $\frac{1}{2}g(\Delta t)$ 就不能任意去掉。

# 第二次数学危机的解决

- ❖ 第二次数学危机的核心是微积分的基础不稳固。
- ❖ 柯西：将微积分建立在极限论的基础上。
- ❖ 魏尔斯特拉斯：逻辑地构造了实数系，建立严格的实数理论，使之成为极限理论的基础。
- ❖ 建立数学分析（或者说微积分）基础的逻辑顺序与历史顺序正好相反。

**实数理论 — 极限理论 — 微积分**

## 第三次数学危机（集合论）

❖ **罗素悖论（理发师悖论）**：某村的一个理发师宣称，他给且只给村里自己不给自己刮脸的人刮脸。问：理发师是否给自己刮脸？

如果他给自己刮脸，他就属于自己给自己刮脸的人，按宣称的原则，理发师不应该给他自己刮脸，这与假设矛盾。如果他不给自己刮脸，他就属于自己不给自己刮脸的，按宣称的原则，理发师应该给他自己刮脸，这又与假设矛盾。

# 集合论——数学的基础

- ❖ 19世纪，数学从各方面走向成熟，人们开始思考：整个数学的基础在哪里？
- ❖ 19世纪末，集合论出现，被人们认定为数学的基础
  - 算术：整数、分数组成的集合
  - 微积分：函数组成的集合
  - 几何：点、线、面组成的集合

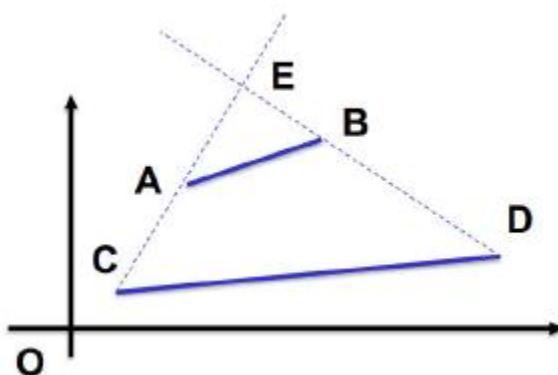


# 朴素（康托）集合论

- ❖ 满足某条性质的个体放在一起组成“集合”。
- ❖ 定义了基数,可数集合等概念
- ❖ 若一个集合能够和它的子集构成一一对应, 则它是无穷的。
- ❖ 连续统假说



康托 (1845.3.3-1918.1.6)  
德国数学家



# 用集合论建立算术基础

- ❖ 老子曰：道生一、一生二、二生三，三生万物。
- ❖ 弗雷格从空集出发，用集合及集合等价的概念，定义了全部非负整数：用空集定义0，用0定义1，用0, 1定义2, ...



# 全部数学都归结为算术

算术（非负整数）

对等



有理数（分数）

极限



实数

加虚部

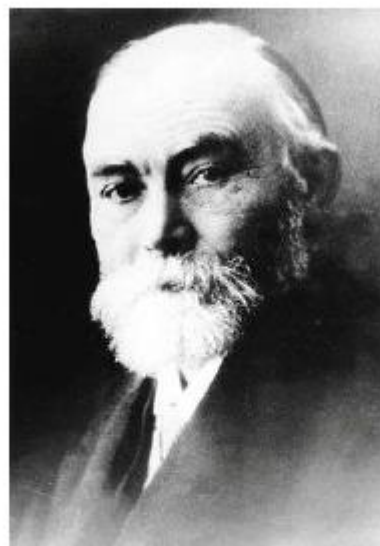


复数

解析几何



几何



弗雷格（1848-1925）  
德国数学家、哲学家、逻辑学家

# 罗素的集合悖论

- ❖ 设集合 $R$ 是一切不属于自身的集合（即不含自身作为元素的集合）所组成， $R$ 是否包含于 $R$ ？
- ❖ 弗雷格：一个科学家最大的悲哀莫过于，当他的工作完成时，基础崩塌了。当这本书即将印刷时，罗素先生的一封信就使我陷入这样的尴尬境地。



伯特兰·罗素（1872-1970）  
英国哲学家、数学家、逻辑学家

# 第三次数学危机的消除（公理集合论）

- ❖ 1908年，策梅洛提出了由7条公理组成的集合论体系，称为Z-系统。
- ❖ 1922年，弗兰克又加进一条公理，还把公理用符号逻辑表示出来，形成了集合论的ZF-系统。再后来，还有改进的ZFC-系统。
- ❖ 这样，大体完成了由朴素集合论到公理集合论的发展过程，悖论消除了。



策梅洛（1871~1953）  
德国数学家

# 本讲主要内容

- 基本概念
- 矩阵运算

## § 2 矩阵

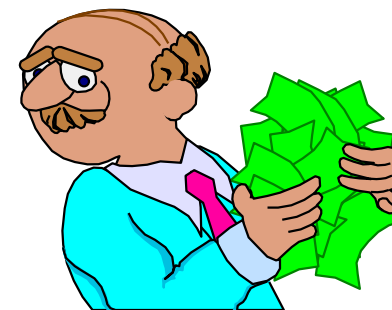
定义: 矩阵是一个方形数表. 具有 $m$ 行和 $n$ 列的数表称为 $m \times n$ 矩阵.

❖ 具有相同行数和列数的矩阵是方阵.

❖ 两个矩阵相等当且仅当它们矩阵尺寸相同且对应元素相等.

$3 \times 2$  matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



## § 2 矩阵

❖  $m \times n$  矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ 矩阵  $A$  的第  $i$  行是  $1 \times n$  矩阵  $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ . 第  $j$  列是一个  $m \times 1$  矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

❖ 第  $(i, j)$  元素表示为  $a_{ij}$ . 我们可以用  $A = [a_{ij}]$  简记矩阵  $A$ 。



# 矩阵加法

**定义：**矩阵  $A = [a_{ij}]$  和  $B = [b_{ij}]$  是  $m \times n$ . 矩阵  $A$  和  $B$  的和，记为  $A+B$ ，是一个  $m \times n$  矩阵，且第  $(i,j)$  元素值为  $a_{ij} + b_{ij}$ . 即,  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**注意：**尺寸相同的矩阵才可做加法运算。

# 矩阵乘法

**定义:**  $A$  是  $n \times k$  矩阵,  $B$  是  $k \times n$  矩阵.  $A$  与  $B$  的乘积, 记为  $A \times B$ , 是一个  $n \times n$  矩阵且第  $(i, j)$  元素为  $A$  矩阵第  $i$  行和  $B$  矩阵第  $j$  列对应元素乘积和.  
即  $A \times B = [c_{ij}]$  且  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

**注意:**  $A$  矩阵的列数和  $B$  矩阵的行数相等, 两矩阵才能相乘.

# 矩阵及其乘法运算

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots c_{mn} \end{bmatrix}$$

"Dot Product"

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ \end{bmatrix}$$

# 矩阵乘法

❖  $A = [a_{ij}]$  和  $B = [b_{ij}]$  的积：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \textcolor{red}{a_{i1}} & \textcolor{red}{a_{i2}} & \dots & \textcolor{red}{a_{ik}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & \textcolor{red}{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \textcolor{red}{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & \textcolor{red}{b_{kj}} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \textcolor{red}{c_{ij}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\textcolor{red}{c_{ij}} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

# 矩阵乘法不满足交换律

设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ?

解:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

所以:  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$



# 单位矩阵及其幂运算

**定义：**单位矩阵是一个  $m \times n$  矩阵，记为  $I_n = [\delta_{ij}]$ ，这里  $\delta_{ij} = 1$  当  $i = j$  且  $\delta_{ij} = 0$  当  $i \neq j$ .

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**如果  $A$  是  $m \times n$  矩阵.**

$$AI_n = I_m A = A$$

**当  $A$  是  $n \times n$  方阵, 则:**

$$A^0 = I_n \quad A^r = \underbrace{A A A \cdots A}_{r \text{ times}}$$

$r$  times

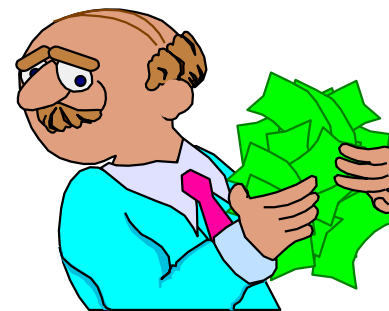


# 矩阵的转置

**定义:** 如果  $A = [a_{ij}]$  是  $m \times n$  矩阵.  $A$  的转置, 记为  $A^t$ , 是  $n \times m$  矩阵且需要矩阵  $A$  的行列互换.

当  $A^t = [b_{ij}]$ , 那么  $b_{ij} = a_{ji}$  对于所有行  $i = 1, 2, \dots, n$  和列  $j = 1, 2, \dots, m$ .

❖ 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$  的转置矩阵为:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ .



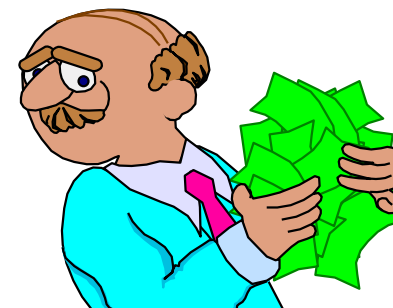
# 0-1矩阵

**定义：** 当矩阵的所有元素值为0或1， 则该矩阵为0-1矩阵。

**布尔算术运算：**

$$b_1 \wedge b_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } b_1 = b_2 = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } b_1 = 1 \text{ or } b_2 = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$





# 关系矩阵的乘法

$$\diamond + \rightarrow \checkmark$$

$$\diamond * \rightarrow \wedge$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m1 & \cdots & c_{mj} & \cdots c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

# 0-1矩阵

**定义:**  $A = [a_{ij}]$  和  $B = [b_{ij}]$  是  $m \times n$  的 0-1 矩阵:

- $A$  和  $B$  的并为对应位置元素的布尔并运算,

即  $a_{ij} \vee b_{ij}$ .  $A$  和  $B$  的并, 记为  $A \vee B$ .

- $A$  和  $B$  的交为对应元素的布尔交运算,

即  $a_{ij} \wedge b_{ij}$ .  $A$  和  $B$  的交, 记为  $A \wedge B$ .



## 0-1矩阵的交与并

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

***A* 和 *B* 的并：**

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

***A* 和 *B* 的交：**

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



# 0-1矩阵的布尔积运算

**定义:**  $A = [a_{ij}]$  是  $m \times k$  的 0-1 矩阵,  $B = [b_{ij}]$  是  $k \times n$  的 0-1。  $A$  和  $B$  的布尔积, 记为  $A \odot B$ , 是一个  $m \times n$  的 0-1 矩阵且  $(i, j)$  为:

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}).$$

**计算  $A$  和  $B$  的布尔积:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

# 0-1矩阵的布尔积运算

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \odot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

## 0-1矩阵的布尔幂运算

**定义:**  $A$  是0-1的布尔方阵.  $A$ 的 $r$ 次幂, 记为  $A^{[r]}$ .

$$\mathbf{A}^{[r]} = \underbrace{\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \dots \odot \mathbf{A}}_{r \text{ times}}.$$



# 0-1矩阵的布尔幂运算

设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 计算  $\mathbf{A}^n$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^{[2]} = \mathbf{A} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{[3]} = \mathbf{A}^{[2]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{[4]} = \mathbf{A}^{[3]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{[5]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{[n]} = \mathbf{A}^5 \quad \text{for all positive integers } n \text{ with } n \geq 5.$$

## 集合的基数与有穷集合(\*)

集合  $A$  的**基数**：集合  $A$  中的元素数，记作  $\text{card}A$  **有穷集**  $A$ ：  
 $\text{card}A = |A| = n$ ， $n$  为自然数。

**有穷集的实例：**

$$A = \{a, b, c\}, \text{card}A = |A| = 3;$$

$$B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in R\}, \text{card}B = |B| = 0$$

**无穷集的实例：**

$N, Z, Q, R, C$  等



# 集合的基数

❖  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$

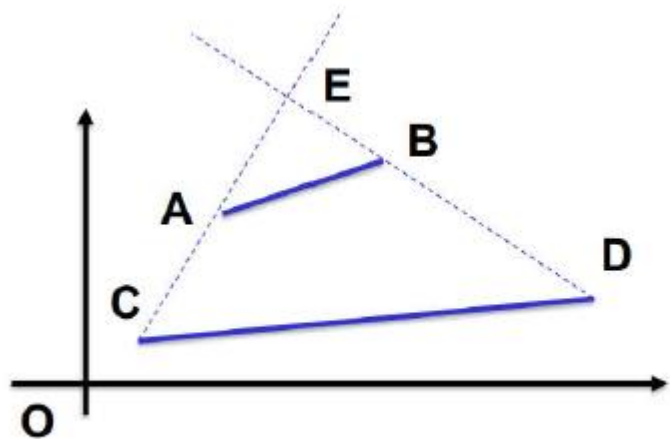
❖  $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

❖  $B \subseteq A, |B| \leq |A|$

❖  $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

❖  $N_e = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

❖  $|N| = |N_e| ?$



# 集合的对等

**伽利略的问题：**

**全体自然数多，还是完全平方数多？**

**康托尔的回答：**

**先定义什么是“一样多”？**

**如果两个集合A、B的元素间能建立一个一对一的对应关系，就说A和B的元素一样多，或者说A和B有相同的势，也说A和B对等。**

# 集合对等

## 定义

设  $A, B$  是两个集合，若存在一个  $A$  到  $B$  的双射，则称集合  $A$  和  $B$  **对等**，记为  $A \sim B$ 。

例：自然数集合  $N$  与其中的所有偶数组成的集合  $E$  对等。

例：  $(0,1) \sim R$

$$f:(0,1) \rightarrow R, f(x)=\tan(x-1/2)\pi$$

# 希尔伯特无限旅馆

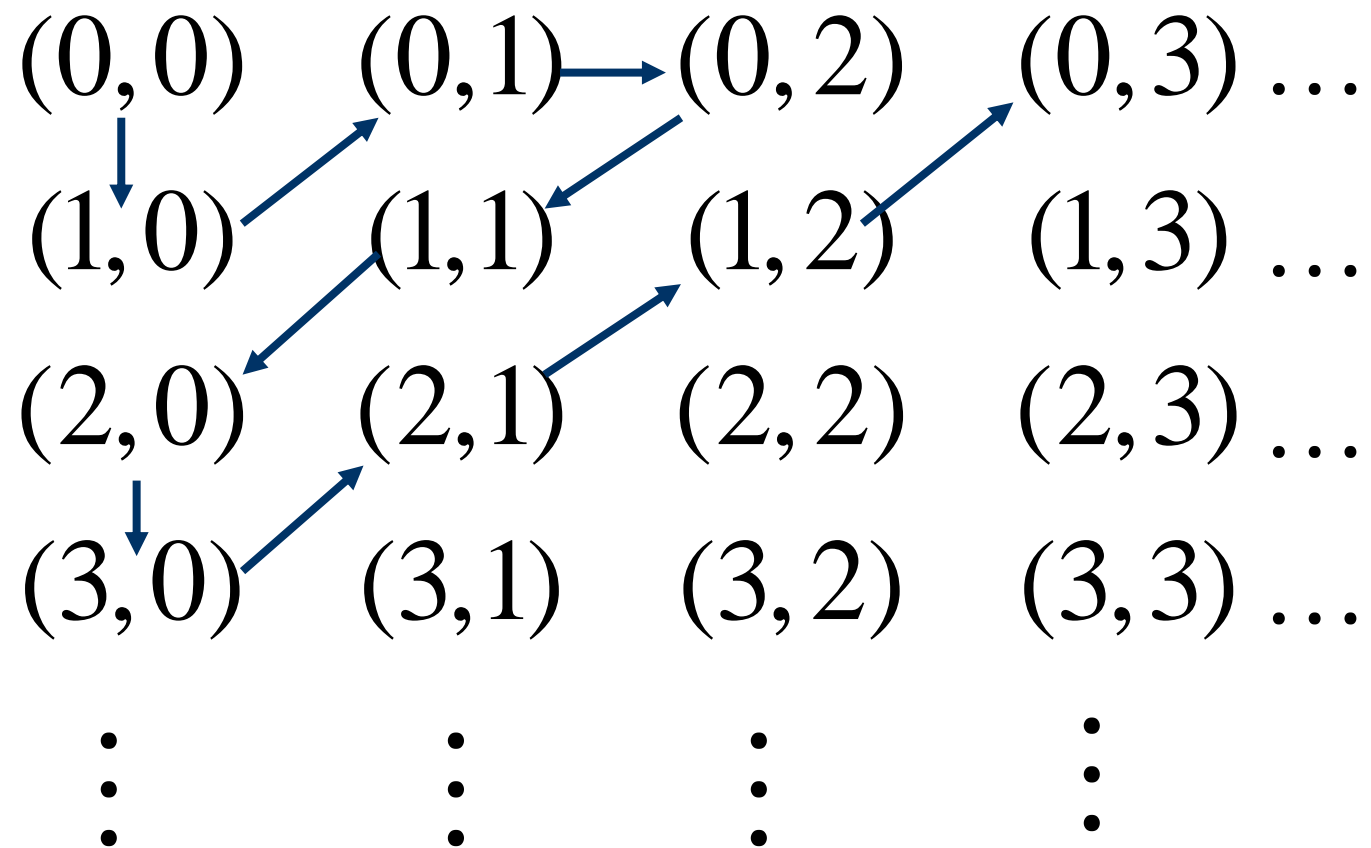
- ❖ 1. 客满后又来了1位客人
- ❖ 2. 客满后又来了一个旅游团，旅游团中有无穷个人
- ❖ 3. 客满后又来了一个万个旅游团，每个团中都有无穷个客人
- ❖ 4. 客满后又来了无穷个旅游团，每个团中都有无穷个客人

# 无限与有限的区别和联系

- ❖ 在无限集中，部分可以等于全体，而在有限集中，部分总是小于全体。
- ❖ 有限时成立的许多命题，对无限不再成立（实数的加法结合律）。
- ❖ 用“数学归纳法”和“极限”方法可建立两者之间的联系。

## 例：证明 $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

证明：按如下方式建立一个 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的一一对应：



# 习题

❖ 课后: 3.2, 3.5, 3.9, 3.12

❖ 答题派: 如右图

## 一、简答题

1. 3.9  $S_1 = \emptyset, S_2 = \{\emptyset\}, S_3 = P(\{\emptyset\}), S_4 = P(\emptyset)$ , 判断以下命题的真假。 (30)

- (1)  $S_2 \in S_4$ .
- (2)  $S_1 \subseteq S_3$ .
- (3)  $S_4 \subseteq S_2$ .
- (4)  $S_4 \in S_3$ .
- (5)  $S_2 = S_1$ .

2. 3.15 请用文氏图表示以下集合。 (20)

- (1)  $\sim A \cup (B \cap C)$ .
- (2)  $(A \oplus B) - C$ .
- (3)  $(A \cap \sim B) \cup (C - B)$ .
- (4)  $A \cup (C \cap \sim B)$ .

3. 证明: (20)

- 1.  $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = (B \oplus C) - A$
- 2.  $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

4. 3.16 设A、B、C代表任意集合, 判断以下等式是否恒真, 如果不是, 请举一反例。 (30)

- (1)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ .
- (2)  $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$ .
- (3)  $A - (B \cup C) = (A - B) - C$ .
- (4)  $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = C$ .
- (5)  $(A \cup B) - (B \cup C) = A - C$ .
- (6)  $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$ .