浙江理工大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A1》期末试卷（A）卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

座位号：________承诺人签名：______________ 学号：______________ 班级：___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	复核教师签名
得分									
阅卷人									

一． 选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，请把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处极限存在，则在 $x=x_0$ 点，函数 $y=f(x)$ （ ）

A. 一定连续　　B. 一定可导　　C. 一定可微分　　D. 可能有间断点

2. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\int_0^{x^2}\arcsin t dt$ 是 $g(x)=(1+\sin x)^2-1$ 的 （ ）

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 等价无穷小　　D. 同阶非等价无穷小

3. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒展开式为 $a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_n(x+1)^n+o\left[(x+1)^n\right]$，则 a_2 等于 （ ）

A. -2　　B. -1　　C. 2　　D. 1

4. 使函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ 满足罗尔定理条件的区间为 （ ）

A. $[0,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[0,2]$

5. 若 $f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t-x)dt$，则 $f(x)=$ （ ）

A. $\sin x$　　B. $-1+\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $1-\sin x$

二． 填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，请把答案填在题中横线上）

1. 设函数 $y=x^3+ax^2+bx$ 在点 $x=1$ 处极值为 -2，则 $a=$_______，$b=$_______。

2. 设隐函数由方程 $x^3-\int_0^y e^t dt-y+\arcsin 2=0$ 所确定，则 $dy=$__________________。

3. 已知 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{9-x^2}}dx=x+C$，则 $\int_0^3 \frac{dx}{f(x)}=$__________________。

4. 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为__________________。

5. 设对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 位于 $\theta\in[0,\pi]$ 内部分的弧长为__________________。

三． 解答下列各题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}\right]$.

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 求函数 $f\left(x\right)=\int_0^x\left(2-t\right)e^{-t}dt$ 的凹凸区间与拐点.

4. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx$.

5. 计算 $\int\frac{2x-8}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$.

四． （本题 7 分，应写出具体解题过程）

求$\int_0^2 f\left(x-1\right)dx$，其中$f\left(x\right)=\begin{cases}2x\arctan x, x<0\\ \dfrac{1}{1+x}, \qquad x\geq 0\end{cases}$.

五． （本题 8 分，应写出具体解题过程）

设$f\left(x\right)=e^x-\int_0^x\left(x-t\right)f\left(t\right)dt$，$f$为二阶可导函数，试求$f\left(x\right)$.

六．（本题 10 分，应写出具体解题过程）

设直线 $y=ax\left(0<a<2\right)$ 与抛物线 $y=x^2$ 围成平面图形面积为 S_1，它们与直线 $x=2$ 围成平面图形的面积为 S_2，

（1）求 a 的值，使得 $S=S_1+S_2$ 最小，并求 S 的最小值；

（2）求 S 取得最小值时，直线 $y=ax\left(0<a<2\right)$，抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=2$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

七．（本题 5 分）

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=\left(2-\xi\right)e^{\xi^2}$.