§9.4 Laplace 变换的应用及综合举例

一、求解常微分方程(组)

二、综合举例

一、求解常微分方程(组)

工具 $\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$

步骤 (1) 将微分方程(组)化为象函数的代数方程(组);

(2) 求解代数方程得到象函数;

(3) 求 Laplace 逆变换得到微分方程(组)的解。

$$
\begin{tikzcd}
\text{微分方程(组)} \arrow[d, "\text{Laplace 正变换}"'] & \text{得到象函数} \arrow[d, "\text{Laplace 逆变换}"] \\
\text{象函数的代数方程(组)} \arrow[ur, "\text{求解}"] & \text{微分方程(组)的解}
\end{tikzcd}
$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程： P219 例 6.9

$$y''(t)+\omega^2 y(t)=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\omega.$$

解 (1) 令 $Y(s)=\mathscr{L}[\,y(t)\,]$,

对方程两边取 Laplace 变换，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0,$$

代入初值，即得 $s^2Y(s)-\omega+\omega^2Y(s)=0$.

(2) 求解此方程，得 $Y(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

(3) 求 Laplace 逆变换，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[\,Y(s)\,]=\sin\omega t\,.$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程：

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 6\mathrm{e}^{-t};\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$，

对方程两边取 **Laplace 变换**，并代入初值，得

$$s^3X(s) + 3s^2X(s) + 3sX(s) + X(s) = \frac{6}{s+1}.$$

(2) 求解此方程，得 $X(s) = \dfrac{3!}{(s+1)^4}$.

(3) 求 **Laplace 逆变换**，得

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = t^3\mathrm{e}^{-t}.$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组：

P230 例 9.19

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值，得

$$\begin{cases} sX(s)-1+X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}, \\ sY(s)-1+3X(s)-2Y(s)=\dfrac{2}{s-1}. \end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1}, \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}. \end{cases}$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组：

P230 例 9.19

$$\begin{cases} x'(t)+x(t)-y(t)=\mathrm{e}^t, & x(0)=1, \\ y'(t)+3x(t)-2y(t)=2\mathrm{e}^t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解 (2) 求解此代数方程组，得

$$X(s)=\frac{1}{s-1}, \quad Y(s)=\frac{1}{s-1}.$$

(3) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t)=y(t)=\mathrm{e}^t$.

$$\begin{cases} (s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1}, \\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}. \end{cases}$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组:

$$\begin{cases} x' + y'' = \delta(t-1), & x(0) = y(0) = 0, \\ 2x + y''' = 2u(t-1), & y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$, $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$,

对方程组两边取 Laplace 变换, 并代入初值, 得

$$\begin{cases} sX(s) + s^2 Y(s) = e^{-s}, \\ 2X(s) + s^3 Y(s) = \dfrac{2}{s} e^{-s}. \end{cases}$$

(2) 求解此方程组, 得 $X(s) = \dfrac{1}{s} e^{-s}$, $Y(s) = 0$.

(3) 求 Laplace 逆变换, 得 $x(t) = u(t-1)$, $y(t) = 0$.

二、综合举例

例 求函数 $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的 Laplace 变换。 P232 例 9.21

解 方法1 直接利用定义求解。

根据 Laplace 变换的定义，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{令 } x=1-t}\mathrm{e}^{-s}\int_0^1 x\mathrm{e}^{sx}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s}\left[x\mathrm{e}^{sx}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{sx}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-s}.$$

二、综合举例

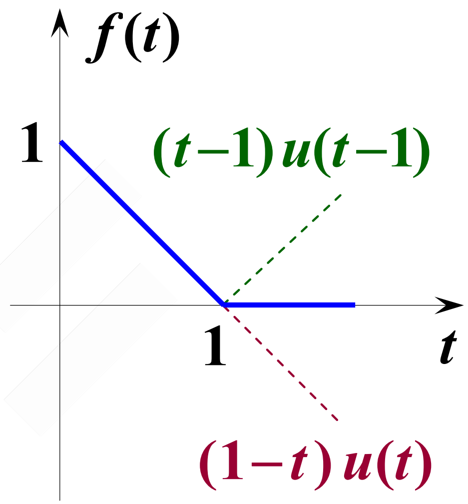
例 求函数 $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的 Laplace 变换。 P232 例 9.21

解 方法2 利用查表法求解。

如图，$f(t)=(1-t)\,u(t)+(t-1)\,u(t-1)$

$$=u(t)-t\,u(t)+(t-1)\,u(t-1),$$

由 $\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$，$\mathscr{L}[t\,u(t)]=\dfrac{1}{s^2}$，



利用线性性质及延迟性质，

可得 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-s}.$

例　求函数 $f(t)=t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t$ 的 Laplace 变换。

解　已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$，

根据位移性质，有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+3)^2+4},$$

进一步，根据象函数的导数性质，有

$$\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{-3t}\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[\frac{2}{(s+3)^2+4}\Big]$$

$$=\frac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法1 利用查表法求解。

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2},\quad \Rightarrow\quad f(t)=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

方法2 利用留数法求解。

$s_1=0,\ s_2=1$ 分别为 $F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 0]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 1]$$

$$=\left.\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s-1)^2}\right|_{s=0}+\left.\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s}\right)'\right|_{s=1}=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法3 利用卷积定理求解。

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]*\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$=t\,\mathrm{e}^t*1=\int_0^t\tau\,\mathrm{e}^\tau\cdot 1\,\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

方法4 利用积分性质求解。

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]=\int_0^t g(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right]=\int_0^t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^t t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程：

$$x''+4x'+3x=\mathrm{e}^{-t},\quad x(0)=x'(0)=1.$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，对方程两边取 Laplace 变换，

并代入初值，得

$$s^2X(s)-s-1+4[sX(s)-1]+3X(s)=\frac{1}{s+1}.$$

(2) 求解此方程，得

$$X(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{7}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}-\frac{3}{4(s+3)}.$$

(3) 求 Laplace 逆变换，得 $x(t)=\frac{7}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-3t}.$

例 利用 Laplace 变换求解微分方程： P230 例 9.18

$$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2\mathrm{e}^t\cos t,\quad x(0)=x'(0)=0.$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，对方程两边取 Laplace 变换，

并代入初值，得 $s^2X(s)-2sX(s)+2X(s)=\dfrac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$.

(2) 求解此方程，得 $X(s)=\dfrac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}$.

(3) 求 Laplace 逆变换，得

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathrm{e}^t\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big]$$

$$=\mathrm{e}^t\mathscr{L}^{-1}\Big[\Big(\frac{-1}{s^2+1}\Big)'\Big]=t\,\mathrm{e}^t\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{1}{s^2+1}\Big]=t\,\mathrm{e}^t\sin t.$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2, & x(0) = x'(0) = 0, \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t, & y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s) = \mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 **Laplace 变换**，并代入初值，得

整理得 $$\begin{cases} (s+1)Y(s) - sX(s) = \dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s) - (s+1)X(s) = -\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

(2) 求解代数方程组，得

$$X(s) = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}, \quad Y(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}.$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^t-2, & x(0)=x'(0)=0, \\ 2y''-x''-2y'+x=-t, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解 (2) 求解代数方程组，得

$$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(s-1)^2},$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

(3) 求 **Laplace** 逆变换，得

$$x(t)=-t+t\,\mathrm{e}^t,\quad y(t)=1-\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t.$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} x''-x-2y'=\mathrm{e}^t, & x(0)=-3/2, \quad x'(0)=1/2, \\ x'-y''-2y=t^2, & y(0)=1, \quad y'(0)=-1/2. \end{cases}$$

解 (1) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$Y(s)=\mathscr{L}[y(t)]$，

对方程组两边取 Laplace 变换，并代入初值，得

$$\begin{cases} s^2X(s)+\dfrac{3}{2}s-\dfrac{1}{2}-X(s)-2sY(s)+2=\dfrac{1}{s-1}, \\ sX(s)+\dfrac{3}{2}-s^2Y(s)+s-\dfrac{1}{2}-2Y(s)=\dfrac{2}{s^3}. \end{cases}$$

例 利用 **Laplace** 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} x''-x-2y'=\mathrm{e}^t, & x(0)=-3/2, \quad x'(0)=1/2, \\ x'-y''-2y=t^2, & y(0)=1, \quad y'(0)=-1/2. \end{cases}$$

解 (2) 求解代数方程组，得

$$X(s)=-\frac{3}{2(s-1)}+\frac{2}{s^2}, \quad Y(s)=-\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{2s}.$$

(3) 求 **Laplace** 逆变换，得

$$x(t)=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^t+2t, \quad y(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}.$$

*例 利用 Laplace 变换求解积分方程：

P233 例 9.24

$$f(t)=at-\int_0^t \sin(x-t)f(x)\,\mathrm{d}x,\quad (a\neq 0).$$

解 (1) 由于 $f(t)*\sin t=\int_0^t f(x)\sin(t-x)\,\mathrm{d}x$,

因此原方程变为： $f(t)=at+f(t)*\sin t.$

(2) 令 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，在方程两边取 Laplace 变换，得

$$F(s)=a\mathscr{L}[t]+F(s)\cdot\mathscr{L}[\sin t]=\frac{a}{s^2}+F(s)\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

$$\Rightarrow\quad F(s)=\frac{a}{s^2}+\frac{a}{s^4}.$$

(3) 求 Laplace 逆变换，得 $f(t)=at+\dfrac{at^3}{6}.$

*例 设质量为 m 的物体静止在原点，在 $t=0$ 时受到 x 方向的冲击力 $F_0\delta(t)$ 的作用，求物体的运动方程。 P231 例 9.20

解 (1) 设物体的运动方程为 $x=x(t)$，

根据 Newton 定律，有

$$m x''(t)=F_0\delta(t),\quad x(0)=x'(0)=0.$$

(2) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，对方程两边取 Laplace 变换，

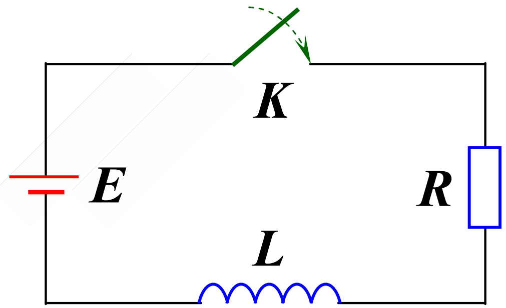
并代入初值，得

$$m s^2 X(s)=F_0,\quad \Rightarrow\quad X(s)=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{s^2}.$$

(3) 求 Laplace 逆变换，

即得物体的运动方程为：$x(t)=\dfrac{F_0}{m}t.$

*例 设有如图所示的 R 和 L 串联电路，在 $t=0$ 时刻接到直流电势 E 上，求电流 $i(t)$. P234 例 9.25



解 (1) 由 Kirchhoff 定律，可知 $i(t)$ 满足：

$$R\,i(t)+L\,i'(t)=E,\quad i(0)=0.$$

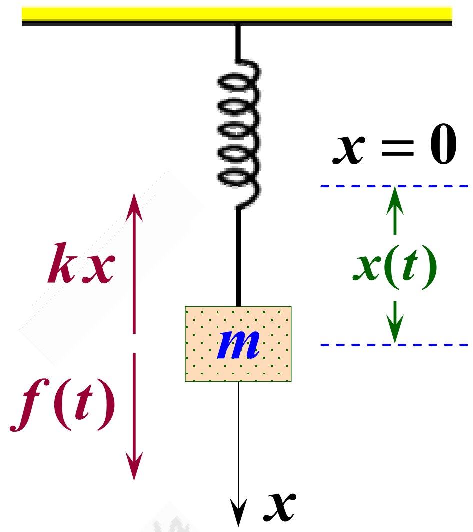
(2) 令 $I(s)=\mathscr{L}[i(t)]$，对方程两边取 Laplace 变换，

并代入初值，得 $R\,I(s)+L\,s\,I(s)=\dfrac{E}{s}$,

$$\Rightarrow\quad I(s)=\frac{E}{s(R+sL)}=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right).$$

(3) 求 Laplace 逆变换，得 $i(t)=\dfrac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

*例 质量为 m 的物体挂在弹簧系数为 k 的弹簧一端(如图)，作用在物体上的外力为 $f(t)$。若物体自静止平衡位置 $x=0$ 处开始运动，求该物体的运动规律 $x(t)$.



解 (1) 根据 Newton 定律及 Hooke 定律，可得

$$m\,x''(t)=f(t)-k\,x(t).$$

即物体的运动规律 $x(t)$ 满足如下的微分方程:

$$m\,x''(t)+k\,x(t)=f(t),\quad x(0)=x'(0)=0.$$

解 (1) $m\,x''(t)+k\,x(t)=f(t)$， $x(0)=x'(0)=0$.

(2) 令 $X(s)=\mathscr{L}[x(t)]$，$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，

对方程两边取 Laplace 变换，并代入初值，得

$$m\,s^2X(s)+k\,X(s)=F(s),$$

记 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$， 有 $X(s)=\dfrac{1}{m\,\omega_0}\cdot\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\cdot F(s)$.

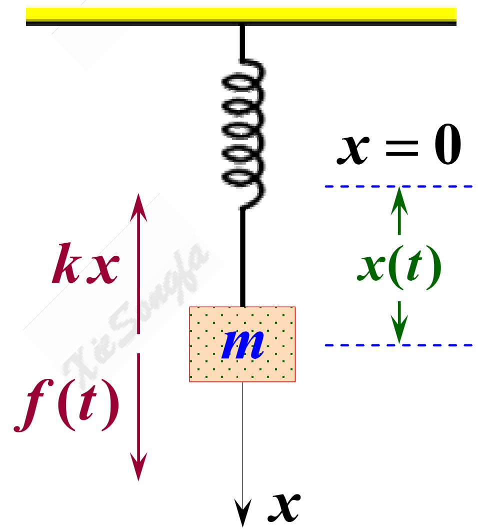
(3) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}]=\sin\omega_0 t$，并利用卷积定理，有

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\frac{1}{m\,\omega_0}\cdot[\sin\omega_0 t * f(t)].$$

解 ● 当 $f(t)$ 具体给出时，即可以求得运动规律 $x(t)$.

例如 设物体在 $t=0$ 时受到的外力为 $f(t)=A\delta(t)$，A 为常数，

此时，物体的运动规律为：



$$x(t)=\frac{1}{m\omega_0}\cdot[\sin\omega_0 t * A\delta(t)]$$

$$=\frac{A}{m\omega_0}\cdot\sin\omega_0 t\,.$$

● 可见，在冲击力的作用下，运动为正弦振动；振幅为 $\dfrac{A}{m\omega_0}$，角频率为 ω_0；称 ω_0 为该系统的自然频率或固有频率。

（Matlab 编程）

放松一下吧！……

附：利用 Matlab 实现 Laplace 变换

- 在数学软件 Matlab 的符号演算工具箱中，提供了专用函数来进行 Laplace 变换与 Laplace 逆变换。

(1) F = laplace(f)　对函数 $f(t)$ 进行 Laplace 变换，并返回结果 $F(s)$。

(2) f = ilaplace(F)　对函数 $F(s)$ 进行 Laplace 逆变换，并返回结果 $f(t)$。

附：利用 Matlab 实现 Laplace 变换

例 求函数 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的 Laplace 变换。

解 程序代码：

```
clear;
syms t;
f = sin(t)/t;
F = laplace(f);
```

运行结果： F = atan(1/s)

其中， atan 为反正切函数。

数学表示： $F(s)=\arctan\dfrac{1}{s}$.

附：利用 Matlab 实现 Laplace 变换

例 求函数 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$ 的 Laplace 逆变换。

解 程序代码：

```
clear;
syms s;
F=(s^2+2*s+1)/(s^2-2*s+5)/(s-3);
f=ilaplace(F);
```

运行结果： f = 2*exp(3*t)-exp(t)*cos(2*t)+exp(t)*sin(2*t)

其中， exp 为指数函数。

数学表示： $f(t)=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}\cos 2t+\mathrm{e}^{t}\sin 2t\,.$

放松一下吧！……