高等数学 A1

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 上）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此为 2021 年 第二版 第 2 次发行）

目录

说明：1 高数系列试卷见本书最后一页。如有其他需要，请加入 QQ 群获取其他资料；

2《高等数学 A1》中的期末 A 卷是学期末尾进行的统一考试试卷，B 卷是开学后一两周内进行的补考试卷。

答案册里的脑筋急转弯和顺口溜供大家放松用，脑筋急转弯答案可以在下面给的群里查到哈。

资料说明

试卷整理人：张创琦

版次：2021 年 12 月 23 日 第二版 第 2 次发行

微信公众号：创琦杂谈

本人 QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380

创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题

1.A　2. B　3. C　4. A　5. B　6. D

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$或者$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.　2. $\frac{1}{e}$.　3. $\frac{2}{3}$.

4. −3.　5. $x+C$.　6. $y=Cxe^{\frac{x^2}{2}}$.

评分标准说明：　每题 4 分，第 5 小题没写“*C*”扣 2 分, 第 6 小题没写“*C*”扣 2 分, 其余小题错则扣全分。

三 、计算题（本题共五小题，满分 30 分）

1.**解**：法一：

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$ ------------ 3 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$$ ------------ 3 分

法二：令$u=\frac{1}{x}$,

$$原式=\lim_{u\to0}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\ln(1+u)\right]=\lim_{u\to0}\left[\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}\right]$$ ------------ 2 分

$$=\lim_{u\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+u}}{2u}\right]$$ ------------ 2 分

$$=\lim_{u\to0}\left[\frac{1}{2(1+u)}\right]=\frac{1}{2}.$$ ------------ 2 分

评分标准说明：　只写出答案$\frac{1}{2}$，无步骤的，扣 4 分。

2. **解**：令$u=\sqrt[3]{x}$，则$x=u^3,\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$ --------------- 1 分

$$原式=3\int u^2e^u\mathrm{d}u=3\int u^2\mathrm{d}e^u$$

$$=3(u^2e^u-\int e^u\mathrm{d}u^2)=3u^2e^u-6\int ue^u\mathrm{d}u$$ --------------- 2 分

$$= 3u^2 e^u - 6\int u \mathrm{d} e^u = 3u^2 e^u - 6(ue^u - \int e^u \mathrm{d}u)$$ --------------- 2 分

$$= 3e^u(u^2 - 2u + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2) + C.$$ ------------- 1 分

评分标准说明： 没写“C”扣 1 分。

3 **解:**令 x=sin$u$, 则 dx=cos$u$du, 当 x=0, u=0;当 $x=\dfrac{1}{2}$， $u=\dfrac{\pi}{6}$ ------------- 2 分

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} u\sin^2 u \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{6}} u \frac{1-\cos 2u}{2} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} u \mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} u\cos 2u \mathrm{d}u$$

------------- 2 分

$$= \frac{\pi^2}{144} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} u \mathrm{d}\sin 2u = \frac{\pi^2}{144} - \frac{1}{4}\left[u\sin 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2u \mathrm{d}u\right]$$ ------------- 2 分

$$= \frac{\pi^2}{144} - \frac{\sqrt{3}\pi}{48} + \frac{1}{16}.$$

评分标准说明： 步骤正确，答案不对，扣 2 分。

4 **解：** 令 x=0， 则 y=1，

两端关于 x 求导得 $e^y y' + y + xy' = 0$， ------------- 2 分

再关于 x 求导得 $e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0$ ------------- 2 分

求导代入 x=0, y=1 得 $y'(0) = -\dfrac{1}{e}$，$y''(0) = \dfrac{1}{e^2}$ ------------ 2 分

评分标准说明： 只写出答案扣 4 分。

5 **解：**特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 9 = 0$，特征根 $\lambda = -1 \pm 2\sqrt{2}i$. --------- 1 分

所以齐次方程得通解为 $y = e^{-x}(C_1\cos 2\sqrt{2}x + C_2\sin 2\sqrt{2}x)$ ---------- 2 分

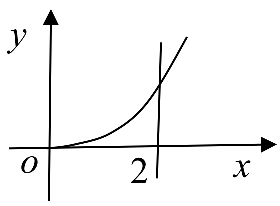
因为-1 不是特征根，设特解为 $y = Ae^{i\ x}$，代入得，$A = 1$. ---------- 2 分

所以，原方程的通解为 $y = e^{-x}(1 + C_1\cos 2\sqrt{2}x + C_2\sin 2\sqrt{2}x)$.----------- 1 分

评分标准说明： 没写“C_1，C_2”扣 1 分。

四、综合题（本题共两小题，满分 14 分）

1. **解：**(1) 区域 D 如图



$$A = \int_0^2 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3};$$ --------- 3 分

(2) $V_y=\int_0^4 4\pi \mathrm{d}y-\int_0^4 \pi y \mathrm{d}y=16\pi-\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi$. -------- 4 分

2. **解：**(1) 由

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=\left[f(x)+g(x)\right]^2-2f(x)g(x)=\left(2e^x\right)^2-2F(x)$$ -------- 2 分

可见 $F(x)$所满足的一阶微分方程为 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$ -------- 2 分

(2) $F(x)=e^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 4e^{2x}e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-2x}\left[\int 4e^{4x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{2x}+Ce^{-2x}$ ----- 2 分

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$， 于是 $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$ ----- 1 分

评分标准说明： 第 1 题不要求画图；第 2 题未求“C”扣 1 分。

五、证明题（**本题共两小题，满分 8 分**）

1. **证：**令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}, x\in[0,+\infty)$ ，显然，$f(0)=0$. ---- 1 分

又因为，当 $x>0$,

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$$

故而 $f(x)$在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， ------------ 2 分

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$， 即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$. ------------ 1 分

2. **证：**法一：柯西中值定理

令 $g(x)=\ln x$.则 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$. ------------ 1 分

在(1, 2)上应用柯西中值定理，存在 $\xi\in(1,2)$ ，使得

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ ------------ 2 分

即 $\frac{f(2)}{\ln 2}=\frac{e^{\xi^2}}{\frac{1}{\xi}}$ ，故 $f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$. ------------ 1 分

法二：介值定理

令 $F(x)=f(2)-xe^{x^2}\ln 2, x\in[1,2]$. 则 $F(x)$在[1,2]上连续. --------- 1 分

由积分中值定理：存在$\eta \in [1,2]$,使得 $f(2)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t=e^{\eta^2}$

因为 $e\le f(2)\le e^4$，0<ln2<1，

所以 $F(1)=f(2)-e\ln 2>0$, $F(2)=f(2)-2e^4\ln 2=f(2)-e^4\ln 4<0$.　　-------- 2 分

由介值定理，得，存在$\xi \in (1,2)$，使得 F(ξ)=0，

即 $f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$.　　-------- 1 分

评分标准说明：第 2 题步骤不完整扣 1 分。

脑筋急转弯：Q1： 8 个数字“ 8 ”，如何使它等于 1000？
Q2：每隔 1 分钟放 1 炮，10 分钟共放多少炮？
Q3：1 根 2 米长的绳子将 1 只小狗拴在树干上，小狗虽贪婪地看着地上离它 2.1 米远的1根骨头，却够不着，请问，小狗该用什么方法来抓骨头呢？
Q4：烟鬼甲每天抽 50 支烟，烟鬼乙每天抽 10 支烟。5 年后，烟鬼乙抽的烟比烟鬼甲抽的还多，为什么？
Q5：你能否用 3 跟筷子搭起一个比 3 大比 4 小的数？

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 D　　2 B　　3 A　　4 A　　5 D　　6 A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.$(-1,0)$　　2. $arcsin(1-x^2)$， $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　3. 2

4. $\frac{16}{3}$　　5. $\sqrt{3}$　　6. −1，−1

三 解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos(x^4)}{\sin x}$ ……………………（3 分）

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos(x^4)=2$ ……………………（5 分）

2.解：原式$=\int x^{\frac{1}{2}}lnxdx=\frac{2}{3}\int lnx\,dx^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}lnx-\int x^{\frac{3}{2}}dlnx\right]$　　3 分

$=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}lnx-\int x^{\frac{1}{2}}dx\right]$ ……………………….. 4 分

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}lnx-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$ …………………….. 5 分

3.解：令$x=sect\quad dx=secttantdt$　当$x=\sqrt{2}$,时 $t=\frac{\pi}{4}$； $x=2$,时 $t=\frac{\pi}{3}$　2 分

原式=$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{sect\cdot tant}{sec^2t\cdot tant}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}costdt$ ……………………..4 分

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ……………………..5 分

4.解：方程两边取对数可得$ylnx=xlny$，两边对 x 求导数 ……………….. 2 分

$y'lnx+\frac{y}{x}=lny+\frac{xy'}{y}$ …………………….. 4 分

整理后可求得$y'=\frac{xylny-y^2}{xylnx-x^2}$ ……………………..5 分

5.解：$y'=\frac{-1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$ …………………….. 2 分

$=\frac{-(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{-1}{1+x^2}$ …………………….. 4 分

$dy=y'dx=\frac{-1}{1+x^2}dx$ …………………….. 5 分

6.解：方程对应的线性齐次方程为$y''+2y'-3y=0$ ，

其特征方程为：$r^2+2r-3=0$,可解得特征根为：$r_1=1$,$r_2=-3$ ，

通解为：$Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$ …………………….. 2 分

设原方程的一个特解为：$y^*=ax+b$,代入原方程，得 …………………….. 3 分

$-3ax+2a-3b=2x+3$, 解得$a=-\frac{2}{3}$,$b=-\frac{13}{9}$ ， $y^*=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}$ 4 分

原方程通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}$ …………………….. 5 分

四 综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分为 14 分）

1. 解：（1）

设切点坐标为$(x_0\ ,y_0)$,那么$k=y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ ，

切线方程为：$y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,………………………………1 分

(0,0)代入切线方程，解得切点坐标(e,1)切线方程：$y=\frac{x}{e}$ …….. 2 分

$dA=(e^y-ey)dy$ ……………………….. 3 分

$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=e^y\Big|_0^1-\frac{e}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$ ……………………. 4 分

(2)

$dv=\pi((e^y)^2-(ey)^2)dy$ ……………………….. 5 分

$v=\pi\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{e^2}{3}y^3\Big|_0^1\right]=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}$……………. 7 分

2．解：因为$(x_0, f(x_0))$处的切线方程为：

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

可解得，该直线与 x 轴交点为$\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}，0\right)$

与直线$x = x_0$交点为$(x_0, f(x_0))$ …………………. 2 分

所围成面积为

$\frac{1}{2}|f(x_0)| \cdot \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| = 4$ ………………………….3 分

化简得$8y' = y^2$ ………………………….4 分

通解为$-\frac{8}{y} = x + C$, …………………………. 6 分

初始条件$f(0) = 2$,带入$C = -4$ $\quad \therefore y = \frac{8}{4-x}$ …………………………. 7 分

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：由中值定理知有一$a \in [2/3, 1]$使$3\int_{2/3}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(a)$，…………………2 分

$\boldsymbol{f(x)}$在$\boldsymbol{[0, a]}$上连续，在$\boldsymbol{(0, a)}$内可导，且$\boldsymbol{f(a) = f(0)}$，

由 Rolle 定理知至少存在一点$\boldsymbol{\xi \in (0, a) \subset (0, 1)}$使$\boldsymbol{f'(\xi) = 0}$………………4 分

2、证明：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$，

又$f''(x)$存在，因此$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$， -----------------------1 分

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$， -----------------------2 分

法一：利用泰勒公式

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2 = x + \dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2 \geq x$ ------------------4 分

脑筋急转弯：6 用三个 3 组成一个最大的数？

7 有 100 个捧球队比赛，选冠军，最少要赛多少场？

8 有一种细菌，经过 1 分钟，分裂成 2 个，再过 1 分钟，又发生分裂，变成 4 个。这样，把一个细菌放在瓶子里到充满为止，用了 1 个小时。如果一开始时，将 2 个这种细菌放入瓶子里，那么，到充满瓶子需要多长时间?

（ξ 介于 0 与 x 之间）

法二：利用单调性

$f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$□ ， $f'(0)=1$，

当 $x>0$ 时， $f'(x)\geq f'(0)=1$；当 $x<0$ 时， $f'(x)\leq f'(0)=1$，

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）

当 $x>0$ 时，$\xi>0$，$f'(\xi)\geq 1$，即 $\dfrac{f(x)}{x}\geq 1, f(x)\geq x$；当 $x<0$ 时，$\xi<0$，$f'(\xi)\leq 1$，

即 $\dfrac{f(x)}{x}\leq 1, f(x)\geq x$。 ----------------4 分

本卷知识点如下：

一．选择题

1.夹逼定理 2.导数定义 3.重要极限 4.不定积分换元法

5.反常积分敛散性判断 6.二阶微分方程特解求一阶，二阶导

二．填空题

1.单调区间 2.复合函数定义域 3.驻点 4.奇偶函数定积分性质

5.参数方程求导 6.分段函数可导，连续

三．计算题

1.积分上限函数求导，洛必达法则 2.分部积分法 3.定积分三角换元

4.隐函数求导数 5.求函数微分 6.二阶线性非齐次微分方程求通解

四．综合题

1.元素法求面积，求体积 2.求切线，求一阶微分方程

五．证明题

1.定积分换元，定积分中值定理，罗尔中值定理 2.泰勒定理，单调性证明

3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 B　　2 D　　3 C　　4 B　　5 A　　6 C

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 e^{-2}　　2 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$　　3 $\frac{1}{8}$

4 xe^x+C　　5 $-\frac{1}{18}$　　6 $\frac{1}{2}$

三 解答题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1 提示：等价代换。答案为$-\frac{3}{2}$

2 提示：=0 处分左右导数用定义求！否则扣分；≠0 处直接求导。

$$f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x), x\ge 0 \\ 2x+1, \quad x<0 \end{cases}$$

3 提示：三角代换。

答案：$=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$

4 提示：被积函数有绝对值，需分区间。

答案=$\frac{4}{3}-\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{3}{2}}$

5 提示：分部积分法

原式=$(1-\pi)\ln\pi-2\ln 2-1$，能化为相同答案的其他形式都可以。

6 提示：齐次方程+有理函数积分，书本原题，计算较繁琐

特解为：$y^3=y^2-x^2$

四 综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分，应写出具体解题过程）

1 同课堂例题。

单增区间：$\boxed{(-\infty,1),[3,+\infty)}$ 单减区间：$\boxed{(1,3]}$；极小值：$\boxed{\frac{27}{4}}$，无极大值；凸区间：$\boxed{(-\infty,0]}$

凹区间：$\boxed{[0,1),(1,+\infty]}$；拐点：$\boxed{(0,0)}$；渐近线：$\boxed{x=1, y=x+2}$，无水平渐近线

2 同 2017-2018 年题。

答案：$V=\frac{\pi}{30}$

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1 同课堂例题。提示：分区间使用拉格朗日中值定理+罗尔中值定理

2 同课本第五章第三节例题。提示：变量代换法+还原法。

脑筋急转弯：9 小王去网吧开会员卡，开卡要 20 元，小王没找到零钱，就给了网管一张 50 的，网管找回 30 元给小王后，小王找到 20 元零的，给网管 20 元后，网管把先前的 50 元还给了他，请问谁亏了？

4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 B　　2 C　　3 D　　4 C　　5 B　　6 A

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 $\frac{9}{2}\pi$　　2 2　　3 $x\ln x+C$

4 $x^2y=1$　　5 $\frac{1}{8}$　　6 6

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1 提示：洛必达法则。答案：1。

2 提示：变量代换。

答案$=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$

3 提示：变量代换。

答案：$\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}e^{2\sqrt{x}}+C$

4 提示：重要极限二。答案：e^{-6}

5 提示：隐函数求导+微分。答案：$dy=-\frac{y}{e^y+x}dx$

6 提示：令所求值为 A，分部积分法。答案：$A=\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}$

四、综合题（本题 8 分，应写出具体解题过程）

提示：作图理解，空心体积=外圈体积−内圈体积。

答案：(1)$A(1,1)$　　(2)$y=2x-1$　　(3)$V=\frac{\pi}{30}$

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1 提示：偶函数概念+负代换。

2 提示：构造函数法 $F(x)=\frac{f(x)}{1+x^2}$，罗尔定理。

绕口令：1 发废话会花话费，回发废话话费发，发废话花费话费会后悔。

回发废话会费话费，花费话费回发废话会耗费话费。

2 牛郎恋刘娘，刘娘念牛郎，牛郎连连念刘娘，刘娘年年恋牛郎。娘恋郎来郎念娘，郎恋娘来娘念郎。念恋娘郎。

5 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.A　2. A　3. D　4. C　5. A　6. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.0　2. 2　3. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. -2　5. $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$　6. 2

三、解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1.

解：$\int xe^x dx = \int x de^x$ --------------------------2 分

$= xe^x - \int e^x dx$--------------------4 分

$= xe^x - e^x + C$------------6 分

2.

解：令：$x=\tan t$，$x=1$时$,t=\dfrac{\pi}{4};x=\sqrt{3}$ 时$,t=\dfrac{\pi}{3}$，$dx=\sec^2 tdt$ ---------------------2 分

原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\tan^2 t|\sec t|}\sec^2 tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\tan^2 t}\sec tdt$ --------------------------3 分

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sin^2 t}d\sin t=-\dfrac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ --------------------------5 分

$=\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ --------------------------6 分

3.

解：方程两边对 x 求导得 $y'=\ln y+x\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'$ --1 分

解得 $y'=\dfrac{y\ln y}{y-x}$ ---------------------------------2 分

故曲线在点$\left(\dfrac{e^2}{2},e^2\right)$处的切线斜率为 $y'\Big|_{\left(\frac{e^2}{2},e^2\right)}=4$ ---------------------4 分

因此，经过此点的切线方程为 $y=4x-e^2$ --------------------5 分

法线方程为 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{8}e^2$--------------------6

4.

解：特征方程 $r^2+1=0$ 解得 $r=\pm i$，　　　--------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$　------------------3 分

分别求 $y''+y=e^x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*

可解得 $y_1^*=\frac{e^x}{2}$，$y_2^*=\frac{x\sin x}{2}$，　　　　----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^x}{2}+\frac{x\sin x}{2}$ -----------6 分

四、综合题（第 1、2 题分别为 9 分，第 3、4 题分别为 5 分，满分为 28 分）

1.

解：由题意，面积 $\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=\frac{1}{3}$，即 $2a+3b+6c=2$；----------------2 分

又经过原点，则 c=0；因此 $2a+3b=2$ ----------------------4 分

体积 $V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})=(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2)\pi$ --------6 分

$V=(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2)\pi$ 的取得最小值时，

$V'=(\frac{1}{27}+\frac{4}{135}a)\pi=0$，得 $a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$

而 $V''>0$，所以此时体积最小--9 分

2.

解：$f(\mathrm{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x & -1<x<1\\ \frac{1+x}{2} & x=1,-1\\ 0 & x>1,x<-1\end{cases}$　　----------------------4 分

因而，该函数的间断点为只可能在函数的分段点处取得。

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)=0$，因此在 $x=-1$ 处是连续的;-----6 分

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2,f(1)=1$，因此在 $x=1$ 处是间断的，为第一类、跳跃间断点-------------------------9 分

3.

证明：设 $F(x)=xf(x)$，-----------------------------2 分

则在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$F(0)=F(a)=0$，------------------------3 分

由罗尔定理可得：至少$\exists\xi\in(0,a)$，使得$F'(\xi)=0$，

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$--------------------------------5 分

4. 证明:

(1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2$ ----------------------------2 分

(2) $F(a)=\int_b^a\dfrac{dt}{f(t)}=-\int_a^b\dfrac{dt}{f(t)}<0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

则$F(x)=0$在$[a,b]$内至少有一个根-----------------4 分

又$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$，所以 $F(x)$在 $[a,b]$上为单调递增函数

因此$F(x)$在$[a,b]$内有且仅有一根-----------------5 分

脑筋急转弯：Q10：一字四十八个头，内中有水不外流。猜一字。
Q11：有三个空房间，一间房间有三盏灯，另一个房间有三个开关，每一个开关只能打开一盏灯，如果你只可以进每个房间一次，那你要如何知道那个开关控制哪盏灯？
Q12：小丽和妈妈买了 8 个苹果，妈妈让小丽把这些苹果装进 5 个口袋中，每个口袋里都是双数，你能做到吗？
Q13：一堆西瓜，一半的一半比一半的一半的一半少半个，请问这堆西瓜有多少个？
Q14：把 24 个人按 5 人排列，排城 6 行，该怎样排？

6 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题

1.D　2. B　3. C　4. A　5. C　6. A

二 填空题

2；　（1,0）；　3x-9y-1=0;　$-\dfrac{\cos x}{e^y}$；　4/3;　$y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$

三 计算题

1 （洛必达法则）$=-\dfrac{1}{8}$；

2 （对数求导法）$=(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})\cdot x^{\sin x}$；

3 令 $\sqrt{x}=t$ （分部积分法）$=2e^t(t-1)+C$；

4 （凑微分法）$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

5 $6a$；

6 （I 型+I 型） $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{3}{2}x^2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

四 综合题

1 切线方程：$21x-y-18=0.$，法线方程：$x+21y-64=0$。

2 $a=-\dfrac{5}{3},b=2,c=0$

五 证明题

1 提示：由 $\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx$ 分部积分证得。

2 提示：构造函数 $g(x)=f(x)-x$，利用零点定理和罗尔定理证明。

Q15：有二个空房间，一间房间有三盏灯，另一个房间有三个开关，每一个开关只能打开一盏灯，如果你只可以进每个房间一次，那你要如何知道那个开关控制哪盏灯？
Q16：一个挂钟敲六下要 30 秒，敲 12 下要几秒？
Q17：一把 11 厘米长的尺子，可否只刻 3 个整数刻度，即可用于量出 1 到 11 厘米之间的任何整数厘米长的物品长度？如果可以，问应刻哪几个刻度？

7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

AC　A　B　B　D　B

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 $-x\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$　　2 $xy=2$　　3 $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}-1$

4 3, 3　　5 $\frac{1}{2}$　　6 $(\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$

三 计算题（每题 5 分，共 6 题，满分 30 分）

1 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^{x^3}\cdot 3x^2}$（洛必达法则）$=0.$（无穷比无穷）

2 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{2x}$（洛必达法则）$=\frac{1}{2}.$（0 比 0）

3（参数方程求导法，几何应用）

解：$\frac{dy}{dt}=a\sin t,\quad \frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$k_{切}=\frac{dy}{dt}|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1-0}=1,$ 切点：$(a(\frac{\pi}{2}-1),a)$

$\therefore L_{切}$：$y-a=1\cdot[x-a(\frac{\pi}{2}-1)]$

4（分部积分法）

解：原式$=-\int_0^1 x\cdot e^{-x}d(-x)=-\int_0^1 xde^{-x}=-x\cdot e^{-x}|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}|_0^1=1-\frac{2}{e}$

5（弧长）

解：$\frac{dx}{dt}=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$

$\frac{dy}{dt}=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$

$ds=\sqrt{{x'_t}^2+{y'_t}^2}dt=\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}dt=a|t|\mathrm{d}t$

$\therefore s=\int_0^{\pi}ds=\int_0^{\pi}atdt=\frac{a}{2}t^2|_0^{\pi}=\frac{a}{2}\pi^2$

6（一阶非齐次线性方程组）

解：$P(x)=2x,\quad Q(x)=4x,$

$y=e^{-\int 2xdx}[\int 4x\cdot e^{\int 2xdx}dx+C]=e^{-x^2}[\int 4x\cdot e^{x^2}dx+C]=e^{-x^2}[2\cdot\int e^{x^2}dx^2+C]$

$=e^{-x^2}[2e^{x^2}+C]=2+C\cdot e^{-x^2}$

四（最值应用题）

解：设 $AD=x.$

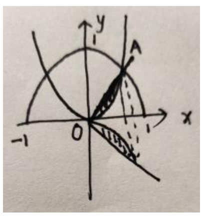
运费 $y=5\cdot\sqrt{400+x^2}+3\cdot(100-x),\ (0<x<100)\qquad y'=\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3,$

令 y' = 0， 解得 x = 15，此为唯一驻点，即为题目所求。

故 D 点应造在距 A 点 15km 处。

五（旋转体体积、最值问题）

$\begin{cases} y=ax^2\\ y=1-x^2\end{cases}\Rightarrow(x=\frac{1}{\sqrt{1+a}},y=\frac{a}{1+a}),\qquad L_{OA}: y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x.$



$V(a)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\pi\cdot\frac{a^2}{1+a}\cdot x^2dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\pi\cdot a^2\cdot x^4dx$

$=\frac{\pi a^2}{1+a}\cdot\frac{1}{3(1+a)\sqrt{1+a}}-\frac{\pi a^2}{5(1+a)\sqrt{1+a}}=\frac{2}{15}\pi a^2\cdot(1+a)^{-\frac{5}{2}}$

(2)

$$V'(a)=\frac{2}{15}\pi\cdot[2a\cdot(1+a)^{-\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}a^2\cdot(1+a)^{-\frac{7}{2}}]=\frac{2}{15}\pi a(1+a)^{-\frac{5}{2}}[2-\frac{5}{2}a(1+a)^{-1}]$$

令 $V'(a)=0$，解得唯一驻点 $a=4$.

当 $a<4$ 时，$V'(a)>0$, 当 $a>4$ 时，$V'(a)<0$,

_ $\therefore a=4$ 为极大值点，也为最大值。此时 $V(4)=\frac{32\pi}{15\times25\sqrt{5}}$

六 证明题

1 证明：

$\because f(x)$在$[0,2]$上连续，

$\therefore$ 由积分中值定理知，至少$\exists\xi_0\in(0,2)$(关于开闭区间解释，见 235 页注释),

s.t.(使得) $\int_0^2 f(x)dx=2f(\xi_0)$

又$\because 2f(0)=\int_0^2 f(x)dx$，　$\therefore f(0)=f(\xi)$

2（求导或分部积分法）

左$=\int_0^u f(t)dt\cdot u\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=x\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x uf(u)du=\int_0^x f(t)(x-t)dt=$右.

Q18：3 个人 3 天用 3 桶水，9 个人 9 天用几桶水?

8 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题

BCDCDD

二、填空题

1、顶点　2、1，-1　3、减少，增加　4、$3e^x(\cos x-\sin x)dx$　5、$\frac{2}{3}$　6、$\sin x-x\cos x+C$

三、解答题

1、$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

2、$=\int\frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2x}}=\arcsin(\ln x)+C$

3、$\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$，另 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$，得 $t<0$，因此 $x<1$。

4、$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(1+x)dx+\int_1^2x^2dx=\frac{23}{6}$

四、定义域 $x\neq\pm1$，函数为奇函数，$y'=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$，

令 $y'=0,y''=0$，得 $x=0,x=\pm\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y’	+	0	-		-	0	-		-	0	+
y’’	-		-		+		-		+		+
y	增，凸	极大 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	减，凸		减，凹	拐点	减，凸		减，凹	极小 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	增，凹

无水平渐近线，$x=\pm1$ 为铅直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线（图略）

五、1、$\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx=e^x-1$，且 $y|_{x=0}=0$，得 $y'=\pm\sqrt{e^{2x}-1}$，取 $y'=\sqrt{e^{2x}-1}$，积分得 $y=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+C$，由初始条件知 C=0，故 $y=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}$。

五、2、（1）面积 $\int_0^1\left(ax^2+bx+c\right)dx=\frac{1}{3}$，又曲线过原点，则 $c=0,2a+3b=2$

（2）体积 $V=\int_0^1\pi\left(ax^2+bx\right)^2dx=\left(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2\right)\pi$

（3）求 V 得最小值，另 $V'=0$，得 $a=-\frac{5}{4}$，$V''>0$，所以此时体积最小，$b=\frac{3}{2}$

六、1、设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx,I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$，

$$\begin{cases}I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\\ I_1-I_2=0\end{cases}\Rightarrow I_1=I_2=\frac{\pi}{4}$$

2、（1）$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$

（2）$F(x)$ 递增，又 $F(a)=\int_b^a\frac{dt}{f(t)}<0,F(b)=\int_b^a f(t)dt>0$，由零点定理知结论成立。

9 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．C;　2．A；　3．B;　4．C;　5．C；　6.B

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. -1, -1　　2. $-\frac{y''}{y'^3}$;　　3. $\frac{\pi}{2}$;　　4. $[-1,0)\cup[1,+\infty)$;

5. $\arcsin(\ln x)+C$　　6. $y=x(C-\cos x)$

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ -----------------1 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ------------------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}$ ---------------------5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$ ---------------6 分

2．解：$\dfrac{dx}{dt}=2$， ---------------------1 分

$te^y+y+1=0\Rightarrow e^y+te^y\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^y}{1+te^y}$， --------------3 分

$t=0$，$x=-1$，$y=-1$， ---------------------4 分

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=0}=-\dfrac{e^y}{2(1+te^y)}\Bigg|_{\substack{t=0\\y=-1}}=-\dfrac{1}{2e}$ ---------------------5 分

因此切线方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2e}(x+1)$ 即 $x+2ey+2e+1=0$ ---------------6 分

3．解：令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t$ 于是 ---------------------1 分

$\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t dt}{(1+\sin t)\cos t}=\int\frac{dt}{1+\sin t}$ --------------------2 分

$=\displaystyle\int\frac{(1-\sin t)dt}{\cos^2 t}$ --------------------3 分

$=\displaystyle\int\sec^2 t dt+\int\frac{1}{\cos^2 t}d\cos t$ ------------------------4 分

$=\tan t-\dfrac{1}{\cos t}+C$ ------------------------5 分

$=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C=-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$ ------------------------6 分

4．解：原式

$=\displaystyle\int_{-2}^{0}(x-x)e^{-x}dx+\int_0^2(x+x)e^x dx=2\int_0^2 xe^x dx$ ------------------2 分

$=\displaystyle 2\int_0^2 xde^x=2\left(xe^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx\right)$ -----------------4 分

$=2\left(e^2+1\right)$ -----------------6 分

5. 解：特征方程 $r^2+r=0$ 解得 $r_1=0, r_2=-1$， --------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1+C_2e^{-x}$ ------------------3 分

分别求 $y''+y'=e^x$ 与 $y''+y'=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*

可解得 $y_1^*=\dfrac{e^x}{2}$，$y_2^*=\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{\cos x}{2}$， ----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}+\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{\cos x}{2}$ -----------6 分

四、综合题（本题满分 8 分）

解：（1）$V(c)=\pi\int_0^c e^{-2x}dx=\dfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-2c}\right)$， ----------------------2 分

又 $\lim\limits_{c\to+\infty}V(c)=\dfrac{\pi}{2}$，$V(a)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-2a}\right)$， ---------------------3 分

由 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{c\to+\infty}V(c)$ 得 $a=\dfrac{1}{2}\ln 2$ ---------------------4 分

（2）设切点为 $\left(x_0, e^{-x_0}\right)$，则切线斜率 $k=-e^{-x_0}$，

切线方程为 $y-e^{-x_0}=-e^{-x_0}\left(x-x_0\right)$， ---------------------5 分

令 $x=0$ 得 $y=\left(1+x_0\right)e^{-x_0}$，$y=0$ 得 $x=1+x_0$，

从而切线与坐标轴夹成的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\left(1+x_0\right)^2e^{-x_0}(x_0>0)$， ---------6 分

$S'=\dfrac{1}{2}\left(1-x_0^{\ 2}\right)e^{-x_0}$，令 $S'=0$ 得 $x_0=\pm1$（负值舍去），当 $x_0<1$ 时，$S'>0$；当 $x_0>1$ 时，$S'<0$，故当 $x_0=1$ 时，面积 S 有极大值，亦即最大值，

所以切点为 $\left(1, e^{-1}\right)$，最大面积 $S=2e^{-1}$。 -----------------------8 分

五、数学建模题（本题满分 7 分）

解：设物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$，得到如下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dT}{dt}=-k\left(T-18\right)\\ T(0)=98\end{cases}$$ ------------------------3 分

用分离变量法可解得 $T=18+80e^{-kt}$ ------------------------4 分

当 t=5 时，T=38，所以 $38=18+80e^{-5k}$，解得 $k=\dfrac{\ln 4}{5}$ -----------------------5 分

则当 T=20 时，有 $20=18+80e^{-\frac{\ln 4}{5}t}$，

得 $t=\dfrac{\ln 40}{(\ln 4)/5}=\dfrac{5(\ln 5+3\ln 2)}{2\ln 2}\approx 13.2$ 分钟， ------------------------6 分

即把鸡蛋放入水池中冷却 13 分钟后鸡蛋的温度达到 20℃，因为达到 38℃用去了 5 分钟，故

大约还需 8 分钟达到 20℃ ------------------------7 分

六、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，满分 7 分）

1、（1）证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{0}^{-a} f(x)dx$$ -----------------1 分

令 $x=-t$，则 $dx=-dt$，当 $x=0$ 时，$t=0$；$x=-a$ 时，$t=a$

$$\int_{0}^{-a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)d(-t) = -\int_{0}^{a} f(-x)dx$$ ----------------2 分

故得 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(-x)dx$

$$= \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(-x)\right]dx$$

（2）由上述结论

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right]dx$$ -------------------3 分

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin^2 x}dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$$= 2$$ ---------------------4 分

2、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，

又 $f''(x)$ 存在，因此 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$， ------------------------1 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$$， ------------------------2 分

法一：利用泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \ge x$$ --------------------3 分

（ξ 介于 0 与 x 之间）

法二：利用单调性

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$　　，$f'(0) = 1$，

当 $x>0$ 时，$f'(x) \ge f'(0) = 1$；当 $x<0$ 时，$f'(x) \le f'(0) = 1$，

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)$$，（ξ 介于 0 与 x 之间）

当$x>0$时，$\xi>0$，$f'(\xi)\geq 1$，即$\dfrac{f(x)}{x}\geq 1, f(x)\geq x$；当$x<0$时，$\xi<0$，$f'(\xi)\leq 1$，

即$\dfrac{f(x)}{x}\leq 1, f(x)\geq x$。 ----------------3 分

10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1．D; 2．B; 3．B; 4．A; 5．B; 6.C

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. 2,-1; 2. $3x^2\cdot g\left(x^3\right)$; 3. 0; 4. $(1+2t)e^{2t}$;

5. $\sin x - x\cos x + C$ 6. $y=C_1(1-x)+C_2\left(1-x^2\right)+1$ 等

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. 解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}=\dfrac{1}{2e}$ ---------------------6 分

2. 解：原式$=\int x\left(\sec^2 x-1\right)dx$ --------------------1 分

$=\int x d\tan x-\int x dx$ --------------------2 分

$=x\tan x-\int \tan x dx-\dfrac{x^2}{2}$ --------------------4 分

$=x\tan x-\dfrac{x^2}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C$ ------------------6 分

3. 解：令$x=a\sin t$，则$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos t dt$， -------------------------2 分

$x=0$时$t=0$，$x=a$时$t=\dfrac{\pi}{2}$，

于是原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt$ --------------------------3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{a\sin t}{a\cos t+a\sin t}dt$ ---------------------------4 分

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin t+a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt$ ---------------------------5 分

$=\frac{\pi}{4}$ ---------------------------6 分

4．解：$\frac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$， ----------1 分

$\frac{dx}{dt}=\frac{-\sin t}{\cos t}$， -----------2 分

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=-t\cos t$ ------------3 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(-t\cos t\right)/dt}{dx/dt}$ -----------5 分

$=\frac{-\cos t+t\sin t}{-\tan t}=\frac{\cos t-t\sin t}{\tan t}$ ----------6 分

5. 解：原方程变形为 $y(x-1)dy=(y^2-1)dx$， --------------1 分

设 $y^2-1\neq 0$，$x-1\neq 0$，分离变量得 $\frac{y}{y^2-1}dy=\frac{1}{x-1}dx$， --------------3 分

两端积分 $\int\frac{y}{y^2-1}dy=\int\frac{1}{x-1}dx$， --------------4 分

得 $\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\ln\left|x-1\right|+\ln\left|C_1\right|$， --------------5 分

于是 $y^2-1=\pm C_1^2\left(x-1\right)^2=C\left(x-1\right)^2$（$C=\pm C_1^2$） --------------6 分

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1．解：由题设，当 $x\neq 0$ 时，$\frac{xf'\left(x\right)-f\left(x\right)}{x^2}=\frac{3a}{2}$，即 $\frac{d}{dx}\left[\frac{f\left(x\right)}{x}\right]=\frac{3}{2}a$，由 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续性，得 $f\left(x\right)=\frac{3}{2}ax^2+cx,x\in\left[0,1\right]$， -------2 分

又由已知条件，得 $2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+cx\right)dx=\frac{a}{2}+\frac{c}{2},c=4-a$，

因此 $f\left(x\right)=\frac{3}{2}ax^2+\left(4-a\right)x$ --------4 分

所求旋转体体积为

$V\left(a\right)=\pi\int_0^1 f^2\left(x\right)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+\left(4-a\right)\right]^2dx=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi$， -----6 分

由$V'(a)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi$，令$V'(a)=0$，得唯一驻点$a=-5$，

又因$V''(a)=\frac{1}{15}>0$，故$a=-5$时，旋转体体积为最小。 ------------8 分

2. 解：$y=x^2-x+1$在点$(0,1)$处的切线斜率为$y'\big|_{x=0}=-1$，

故应求$y''-3y'+2y=2e^x$满足$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=-1$的特解， ----------------2 分

特征方程为$r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1,r=2$， -------------------4 分

可令特解形式为$y^*=Axe^x$代入得$A=-2$，

从而得到通解为$y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$ ---------------------6 分

代入$y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=-1$得$C_1=1,C_2=0$，所求为$y(x)=e^x-2xe^x$ --------8 分

五、证明题（本题满分 6 分）

证明：（1）$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$ ---------------------3 分

（2）$\because$ 由（1）$F'(x)>0$

$\therefore F(x)$单调递增

又$F(a)=\int_b^a\frac{dt}{f(x)}<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$

$\therefore$ 由零点存在定理知，结论成立 -------------------6 分

顺口溜：黑化肥发灰，灰化肥发黑
黑化肥发灰会挥发；灰化肥发挥会发黑
黑化肥挥发发灰会挥发；灰化肥挥发发黑会发挥
黑灰化肥会挥发发灰黑化肥挥发；
灰黑化肥会挥发发黑灰化肥发挥。
黑灰化肥会挥发发灰黑化肥黑灰挥发化为灰；
灰黑化肥会挥发发黑灰化肥灰黑发挥化为黑。
黑化黑灰化肥黑灰会挥发发灰黑化肥黑灰化肥挥发；
灰化灰黑化肥灰黑会发挥发黑灰化肥灰黑化肥发挥。

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

高等数学试题资料目录

1 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

2 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

3 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

4 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

5 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

6 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

7 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

8 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

9 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

10 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

11 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

12 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

13 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

14 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

15 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

16 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

17 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

18 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）

19 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

20 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）

21 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

22 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）

23 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

24 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）