《力学》要求：

1. 运用矢量和微分方法，加深理解位置矢量、位移、速度、加速度、力等物理量的瞬时性和矢量性。

   （1）能借助于直角坐标系熟练地计算质点在平面内运动时速度和加速度。

   （2）能熟练地计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

   （3）理解角量和线量的量值关系。

2. 掌握牛顿三大定律及其应用条件。
3. 掌握功的概念。掌握保守力做功的特点及势能的概念。会计算势能。
4. 掌握动能、动量和冲量的概念。掌握质点的动能定理、动量定理、动量守恒定律、机械能守恒定律，并能用它们分析、解决质点在平面内运动的简单力学问题。
5. 理解刚体转动惯量和对固定轴的力矩概念。掌握刚体绕固定轴的转动定律。通过质点在平面内运动和刚体绕固定轴转动情况，理解动量矩守恒定律及其适用条件。

（一）基本物理量

位置矢量：描述质点在空间的位置情况。 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

位移：描述质点位置的改变情况

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

速度：描述质点位置变动的快慢和方向

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

加速度：描述质点速度的变化情况

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

已知运动方程求速度、加速度（利用定义式求导）
已知速度、加速度求运动方程（利用定义式积分）

例

（一）基本运动

一、直线运动

$$\vec{r} = x\vec{i}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}$$

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \end{cases}$$

二、抛物线运动

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta \\ v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\sin\theta - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\theta)t \\ y = (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

三、圆周运动

圆周运动

线量描述

- 线速度 $\vec{v}$ $v=\dfrac{ds}{dt}$ 方向沿切向
- 切向加速度 $\vec{a}_\tau$ $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$ 方向沿切向
- 法向加速度 $\vec{a}_n$ $a_n=\dfrac{v^2}{R}$ 方向指向圆心
- 线加速度 $\vec{a}$

$$\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau \quad a=|\vec{a}|=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2} \quad \tan(\vec{a},\vec{v})=\frac{a_n}{a_\tau}$$

角量描述

- 角位置 $\theta(t)$
- 角速度 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$
- 角加速度 $\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}$

线量与角量的关系

$$s=R\theta \qquad v=R\omega \qquad a_\tau=R\beta \qquad a_n=R\omega^2$$

一、牛顿三大运动定律及其应用

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

解题步骤：

1. 认物体
2. 看运动
3. 查受力
4. 列方程、求解、讨论

小技巧：

*滑轮组（不计转动情况下）

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T \\ s_1 = 2s_2, \end{cases}$$

$T_1 = T_2 = T$ 绳子上的拉力都相等

$s_1 = 2s_2$, 定滑轮绳子运动距离是动滑轮的两倍。

$$a_1 = 2a_2$$

*斜面情况

两个方向上依次列出方程（xy轴好还是斜面/垂直于斜面好？）

分析清楚摩擦力的方向变化 。

*各种摆

—建立法向/切向方程。

—取线量描述还是角量描述？

二、动力学基本物理量

动量： $\vec{P}=m\vec{v}$

冲量： $\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt$ $\quad \vec{I}=\overline{\vec{F}}(t-t_0)$

力的冲量还可用平均力表示。

动量定理： $\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=\vec{P}-\vec{P}_0$

力对时间的持续作用——动量的变化量

功： $W_{AB}=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}$

力对空间的持续作用——力F所做的功

功率： $N=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{dW}{dt}\boxed{=\vec{F}\cdot\vec{v}}$

动能： $E_k=\frac{1}{2}mv^2$

势能：

$$\begin{cases} E_{p\text{引力}}=-G\frac{Mm}{r} \\ E_{p\text{重力}}=mgy \\ E_{p\text{弹力}}=\frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

三、动力学基本定律

动量守恒定律：
$$\begin{cases} 若\ \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ 则\ \vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = 常矢量 \end{cases}$$

动量守恒的条件

动量守恒的内容

1. 实际中当合外力远远小于合内力时，动量守恒定律也可认为成立.
2. 某一方向上合外力为零，则该方向上动量守恒定律.

动能定理：

$$W = E_k - E_{k0}$$

$$W_{外力} + W_{内力} = E_k - E_{k0}$$（质点组）

动能守恒的条件：$W_{外力} + W_{内力} = 0$

理解动量和动能的区别和联系！

保守力所做的功：
1. 万有引力的功 $W_{引}=-\left[\left(-G\dfrac{Mm}{r_2}\right)-\left(-G\dfrac{Mm}{r_1}\right)\right]$
2. 重力的功 $W_{重}=-(mgy_2-mgy_1)$
3. 弹性力的功 $W_{弹}=-\left(\dfrac{1}{2}kx_2^2-\dfrac{1}{2}kx_1^2\right)$

保守内力的功： $W_{保守内力}=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_p$

动能定理： $W=E_k-E_{k0}$

作用在质点上的合外力所做的功等于该质点动能的增量.

$W_{外力}+W_{内力}=E_k-E_{k0}$ （质点组）

功能原理： $W_{外力}+W_{非保守内力}=\Delta E_k+\Delta E_p=\Delta E_M$

机械能守恒定律：
若 $W_{外力}+W_{非保守内力}=0$
则 $E_M=E_{M0}$ 或 $E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0}$

《刚体》

一、基本物理量

运动学

- 物理量 $\theta(t)$　　$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$　　$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}$
- 线量与角量之间的关系 $v=r\omega,\ a_\tau=r\beta,\ a_n=r\omega^2$
- 角量运动学方程（匀加速转动）

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\beta t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

动力学

- 力矩：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$　方向的判定　$\Longleftrightarrow \vec{F}$
- 转动惯量：$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$　$J=\int_m r^2 dm$　杆/圆环/圆盘/圆柱/球　$\Longleftrightarrow m$
- 刚体定轴转动的转动定律：$\boxed{M=J\beta}$　$\Longleftrightarrow \vec{F}=m\vec{a}$

二、基本定理

（1）刚体定轴转动的动能定律

力矩的功： $W=\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta$

力矩的功率： $N=\frac{dW}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega$

定轴转动的转动动能： $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

定轴转动的动能定理： $\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

力的功，功率，动能

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ N &= F\cdot v \end{aligned}}$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2}$$

力矩对空间的积累效应

$$\boxed{W_{外力}=\Delta E_k=E_k-E_{k0}}$$

质点组动能定理 $\boxed{W_外+W_内=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2}$

（2）质点的角动量（动量矩）： $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times(m\vec{v})$

质点(组)动量 $\boxed{P=mv}$

刚体定轴转动的角动量（动量矩）： $L=J\omega$

力矩对时间的积累效应

刚体定轴转动的角动量定理： $\int_{t_0}^{t} Mdt=J\omega-J\omega_0$

$\boxed{\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=\vec{P}-\vec{P}_0}$

角动量守恒定律:

$$\begin{cases} 若M=\sum_i M_i=0 & （角动量守恒的条件） \\ 则L=\sum_i L_i=常量 & （角动量守恒的内容） \end{cases}$$

机械能守恒定律:

$$\begin{cases} 若W_{外力}+W_{非保守内力}=0 \\ 则E_M=E_{M0}或E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0} \end{cases}$$

动能中既包含平动动能还包含转动动能。

例题

刚体应用题

- 求功、动能、角动量 （3-14，求W，用动能定理），
- 综合题
  - 牛三律+转动定律（受力分析法）
    - 对质点： F=ma
    - 对滑轮： M=Jβ
    - a=Rβ
    - 画图、受力分析
    - 例题3-2
    - 习题3-11，3-10
  - 角动量守恒+机械能守恒 例题3-8
  - 角动量守恒+动能守恒 例题3-9 弹性碰撞问题
  - 多过程的综合型大题 （机械能守恒+角动量守恒+功能原理（动能定理））

例3-17

1.一质点沿x轴运动，其加速度为a=4t，已知t=0时，质点位于x_0=10m处，初速度v_0=0，求位置和时间的关系式。

$$mv - mv_0 = \int_0^t F dt$$

2.一质点沿*x*轴运动，其加速度*a*与位置坐标*x*的关系为

$$a = 2 + 6x^2 \qquad \text{(SI)}$$

如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^x F dx$$

3.一运动质点在某瞬时位于矢径$\vec{r}$ (x,y) 的端点处, 其速度大小为

(A) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

(B) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$

(D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

13、对功的概念有以下几种说法：

(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加.

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零.

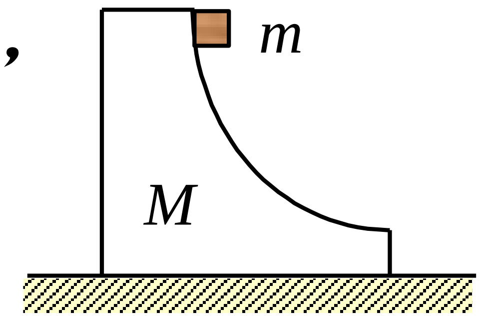
(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作功的代数和必为零.

在上述说法中：

(A) (1)、**(2)**是正确的.　　**(B) (2)**、**(3)**是正确的.

(C) 只有**(2)**是正确的.　　**(D)** 只有**(3)**是正确的.

15、一光滑的圆弧形槽M置于光滑水平面上，一滑块m自槽的顶部由静止释放后沿槽滑下，不计空气阻力．对于这一过程，以下哪种分析是对的？



(A) 由m和M组成的系统动量守恒．

(B) 由m和M组成的系统机械能守恒．

(C) 由m、M和地球组成的系统机械能守恒．

(D) M对m的正压力恒不作功．

32、质量为m_1和m_2的两个物体，具有相同的动量．欲使它们停下来，外力对它们做的功之比W_1:W_2 =$\underline{\quad \frac{m_2}{m_1} \quad}$；若它们具有相同的动能，欲使它们停下来，外力的冲量之比I_1:I_2 =$\underline{\quad (\frac{m_1}{m_2})^{1/2} \quad}$．

16、如图所示，一个小物体，位于光滑的水平桌面上，与一绳的一端相连结，绳的另一端穿过桌面中心的小孔*O*．该物体原以角速度*w* 在半径为*R*的圆周上绕*O*旋转，今将绳从小孔缓慢往下拉．则物体

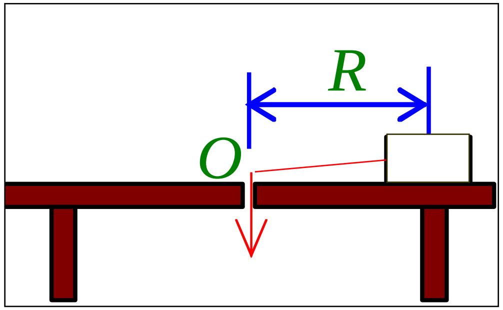
(A) 动能不变，动量改变．

(B) 动量不变，动能改变．

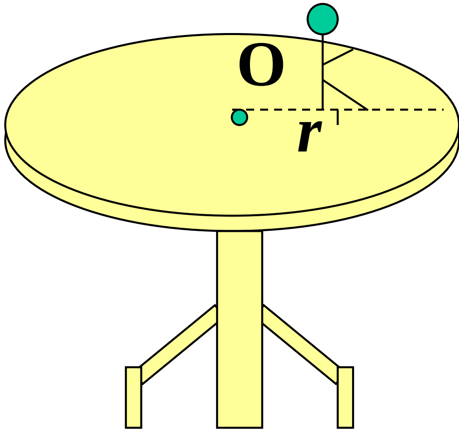
(C) 角动量不变，动量不变．

(D) 角动量改变，动量改变．

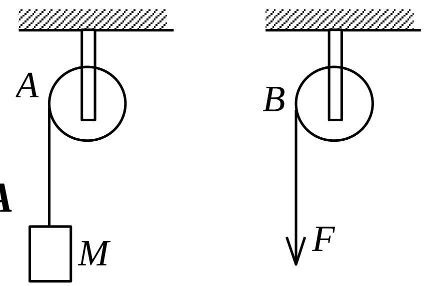
(E) 角动量不变，动能、动量都改变．



有一半径为R的匀质圆形水平转台，可绕通过盘心O且垂直于盘面的竖直固定轴OO‘转动，转动惯量为*J*。台上有一人，质量为*m*。当他站在离转轴r处时，转台和人一起以w_1的角速度转动。问当人走到转台边缘时，转台和人一起转动的角速度w_2=$\underline{w_1(\frac{r}{R})^2}$。



2. 如图所示，A、B为两个相同的绕着轻绳的定滑轮．A滑轮挂一质量为M的物体，B滑轮受拉力F，而且$F = Mg$．设A、B两滑轮的角加速度分别为B_A和B_B，不计滑轮轴的摩擦，则有



(A) $B_A = B_B$.　　(B) $B_A > B_B$.

(C) $B_A < B_B$.　　(D) 开始时$B_A = B_B$，以后$B_A < B_B$.

36、一定滑轮质量为M、半径为R，对水平轴的转动惯量$J = MR^2/2$．在滑轮的边缘绕一细绳，绳的下端挂一物体．绳的质量可以忽略且不能伸长，滑轮与轴承间无摩擦．物体下落的加速度为a，则绳中的张力$T =$ $\underline{\frac{1}{2}Ma}$.

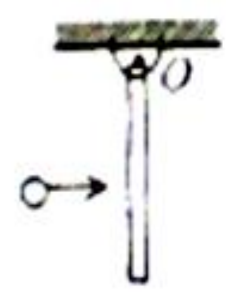
$\left(TR = 1/2MR^2\beta, a = R\beta\right)$

1. 质量为 20 g 的子弹沿 X 轴正向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 X 轴正向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块所受冲量的大小为

(A) 9 N·s .　　　　(B) -9 N·s .

(C) 10 N·s .　　　　(D) -10 N·s .　　　　[　　　]

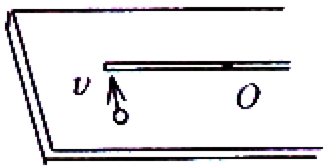
2. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴 O 旋转，初始状态为静止悬挂．现有一个小球自左方水平打击细杆．设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统



(A) 只有机械能守恒．　　(C) 只有对转轴 O 的角动量守恒．

(B) 只有动量守恒．　　(D) 机械能、动量和角动量均守恒．

光滑的水平桌面上有长为 $2l$、质量为 m 的匀质细杆，可绕通过其中点 O 且垂直于桌面的竖直固定轴自由转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$，起初杆静止．有一质量为 m 的小球在桌面上正对着杆的一端，在垂直于杆长的方向上，以速率 v 运动，如图所示．当小球与杆端发生碰撞后，就与杆粘在一起随杆转动．则这一系统碰撞后的转动角速度是



(A) $\frac{lv}{12}$．　　(B) $\frac{2v}{3l}$．

$\boxed{\text{(C) } \frac{3v}{4l}}$．　　(D) $\frac{3v}{l}$．　　[　　]

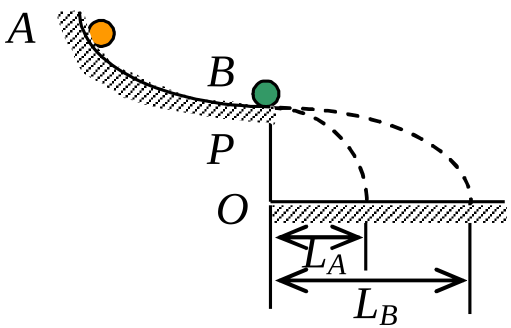
$$lmv = (\frac{1}{3}ml^2 + ml^2)\varpi$$

12. (本题 3分)(0742)

一长为 l，质量均匀的链条，放在光滑的水平桌面上，若使其长度的 $\frac{1}{2}$ 悬于桌边下，然后由静止释放，任其滑动，则它全部离开桌面时的速率为 $\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$．

$$mg\frac{l}{2} - \frac{1}{2}mg\frac{l}{4} = \frac{1}{2}mv^2$$

43、如图所示，质量为m_A的小球A沿光滑的弧形轨道滑下，与放在轨道端点P处(该处轨道的切线为水平的)的静止小球B发生弹性正碰撞，小球B的质量为m_B，A、B两小球碰撞后同时落在水平地面上。如果A、B两球的落地点距P点正下方O点的距离之比L_A / L_B =2/5，求：两小球的质量比m_A / m_B。



$$m_A v_0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{v_A t}{v_B t} = \frac{2}{5}$$

$$(m_A = 5m_B)$$

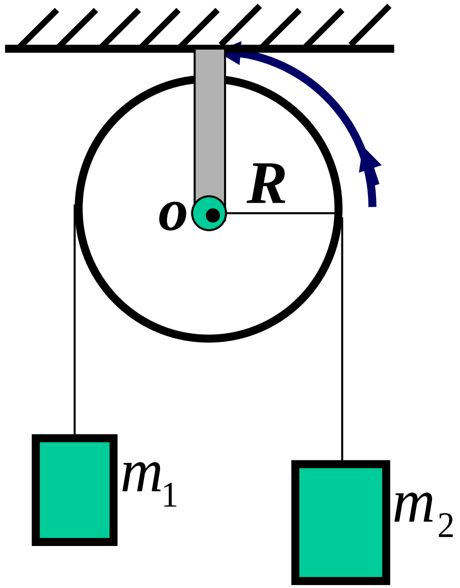
功能原理的题型：2-21，2-24

滑轮转动惯量J，开始静止，
求t时刻滑轮角速度。 $m_1 > m_2$

$$m_1 gR - m_2 gR = J\beta$$

$$\dot{w} = \beta$$

$$w = \int_0^t \beta dt$$



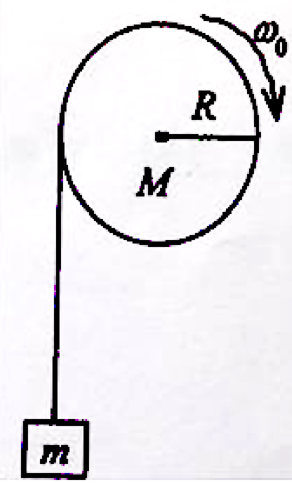
质量为5 kg的一桶水悬于绕在辘轳上的轻绳的下端，辘轳可视为一质量为10 kg的圆柱体．桶从井口由静止释放，求桶下落过程中绳中的张力．辘轳绕轴转动时的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$

其中M和R分别为辘轳的质量和半径，轴上摩擦忽略不计．

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\beta$$

$$mg - T = ma = mR\beta$$

一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M=2.00$ kg，半径为 $R=0.100$ m，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m=5.00$ kg 的物体，如图所示．已知定滑轮的转动惯量为 $J=\frac{1}{2}MR^2$，其初角速度 $\omega_0=10.0$ rad/s，方向垂直纸面向里．求：



(1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；

(2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega=0$ 时，物体上升的高度；

(3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度的大小和方向．

解：(1) ∵

$$mg-T=ma$$

$$TR=J\beta$$

$$a=R\beta$$

∴

$$\beta=mgR/(mR^2+J)=\frac{mgR}{mR^2+\frac{1}{2}MR^2}=\frac{2mg}{(2m+M)R}$$

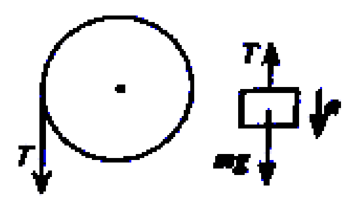
$$=81.7\ \text{rad/s}^2$$

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\beta t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2\\ \omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)\end{cases}$$

方向垂直纸面向外．

(2) ∵ $\omega^2=\omega_0^2-2\beta\theta$

当 $\omega=0$ 时， $\theta=\frac{\omega_0^2}{2\beta}=0.612$ rad

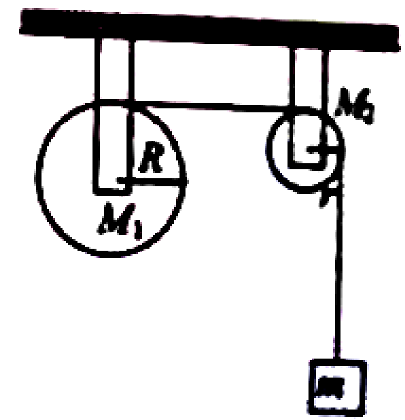


物体上升的高度 $h=R\theta=6.12\times10^{-2}$ m 2 分

(3) $\omega=\sqrt{2\beta\theta}=10.0$ rad/s

方向垂直纸面向外．

质量为 $M_1=24$ kg 的圆轮，可绕水平光滑固定轴转动，一轻绳缠绕于轮上，另一端通过质量为 $M_2=5$ kg 的圆盘形定滑轮悬有 $m=10$ kg 的物体．求当重物由静止开始下降了 $h=0.5$ m 时，



(1) 物体的速度；

(2) 绳中张力．

（设绳与定滑轮间无相对滑动，圆轮、定滑轮绕通过轮心且垂直于横截面的水平光滑轴的转动惯量分别为 $J_1=\frac{1}{2}M_1R^2$，$J_2=\frac{1}{2}M_2r^2$）

解：各物体的受力情况如图所示． 图 2 分

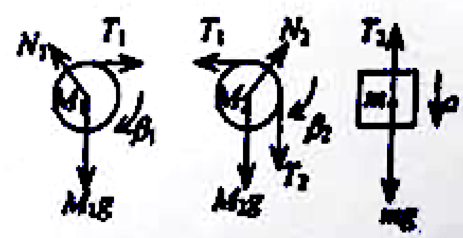
由转动定律、牛顿第二定律及运动学方程，可列出以下联立方程：

$$T_1R=J_1\beta_1=\frac{1}{2}M_1R^2\beta_1$$ 方程各 1 分共 5 分

$$T_2r-T_1r=J_2\beta_2=\frac{1}{2}M_2r^2\beta_2$$

$$mg-T_2=ma,\quad a=R\beta_1=r\beta_2,\quad v^2=2ah$$

求解联立方程，得 $a=\dfrac{mg}{\frac{1}{2}(M_1+M_2)+m}=4\ \text{m/s}^2$



$v=\sqrt{2ah}=2$ m/s 1 分

$T_2=m(g-a)=58$ N 1 分

$T_1=\frac{1}{2}M_1a=48$ N 1 分

2-14 质量为 $m=2\times10^{-3}$ kg 的子弹，在枪筒中前进受到的合力为 $F=400-\dfrac{8000}{9}x$，F 的单位为 N，x 的单位为 m. 子弹射出枪口时的速度为 300 m · s^{-1}，试求枪筒的长度.

解 设枪筒的长度为 l，则根据动能定理有

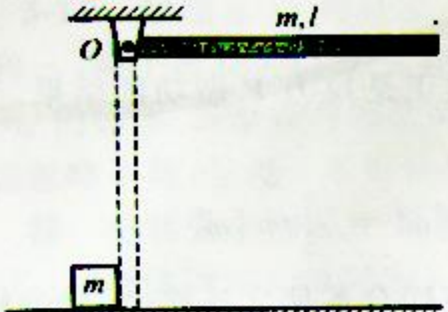
$$\int_0^l F\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\int_0^l \left(400-\frac{8000}{9}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times2\times10^{-3}\times300^2$$

$$l^2-0.9l+\frac{81}{400}=0,\quad 即\left(l-\frac{9}{20}\right)^2=0,\quad 得\ l=0.45(\mathrm{m})$$

所以枪筒的长度为 0.45 m.

3-16 如题 3-16 图所示. 一均匀细棒长为 l，质量为 m，可绕通过端点 O 的水平轴在竖直平面内无摩擦地转动. 棒在水平位置时释放，当它落到竖直位置时与放在地面上一静止的物体碰撞. 该物体与地面之间的摩擦系数为 μ，其质量也为 m，物体滑行 s 距离后停止. 求碰撞后杆的转动动能.



题 3-16 图

解 根据题意可知此题包含了 3 个物理过程.

第一过程为均匀细棒的下落过程. 在此过程中，以棒和地球构成的系统为研究对象，棒受的重力为保守力，轴对棒的支持力始终不做功，所以系统的机械能守恒，则

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

第二过程为均匀细棒与物体的碰撞过程. 在此过程中，以棒和物体构成的系统为研究对象，物体所受的摩擦力对转轴 O 的力矩与碰撞的冲力矩相比较可忽略，所以系统的角动量守恒，则

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega=\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'+mvl$$

其中 ω' 为碰撞后瞬时棒的角速度，v 为碰撞后瞬时物体与棒分离时物体的速率.

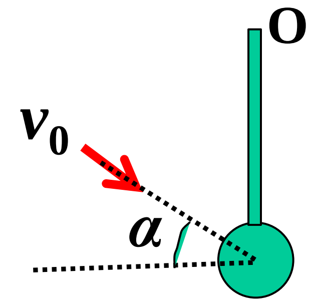
第三过程为分离以后的过程. 对于棒而言，棒以角速度 ω' 继续转动；对于物体而言，物体在水平面内仅受摩擦力的作用，由质点的动能定律得

$$\frac{1}{2}mv^2=\mu mgs$$

联立以上 3 个方程可得碰撞后杆的转动动能为

$$E_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2=\frac{1}{6}m(\sqrt{3gl}-3\sqrt{2\mu gs})^2$$

1. 一个半径为**R**的匀质小木球固定在一个长度为l 的匀质细棒的下端，且可绕水平光滑固定轴**O**转动。今有质量为**m**，速度为v_0的子弹，沿水平成α角的方向射向球心，且嵌在球心。已知小木球、细棒对通过**O**的水平轴的转动惯量总和为**J**。求子弹嵌入球心后系统的共同角速度。



解：

$$mv_0 \cdot \cos\alpha \cdot (l+R) = [J + m(l+R)^2]\omega$$

$$\omega = \frac{mv_0 \cos\alpha (l+R)}{J + m(l+R)^2}$$

《力 学》

运动学 **动力学** **刚体**

定义、计算
- 位置矢量
- 位移
- 速度
- 加速度

牛三定律的应用

1. 物理量P、I、W、N、E_k、E_p

2. 物理量规律

圆周运动
- 线量描述 $v=\dfrac{ds}{dt}$ $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$ $a_n=\dfrac{v^2}{R}$
- 角量描述 $\theta(t)$ $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$ $\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta}$

线量与角量的关系 $s=R\theta$ $v=R\omega$ $a_\tau=R\beta$ $a_n=R\omega^2$

一、牛顿三大运动定律及其应用

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

解题步骤:

1. 认物体
2. 看运动
3. 查受力
4. 列方程、求解、讨论

小技巧:

*滑轮组（不计转动情况下）

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T & \text{绳子上的拉力都相等} \\ s_1 = 2s_2, & \text{定滑轮绳子运动距离是动滑轮的两倍。} \end{cases}$$

$$a_1 = 2a_2$$

*斜面情况

两个方向上依次列出方程（xy轴好还是斜面/垂直于斜面好？）

分析清楚摩擦力的方向变化。

*各种摆

—建立法向/切向方程。

—取线量描述还是角量描述？

二、动力学基本物理量

动量： $\vec{P} = m\vec{v}$

冲量： $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt$　　　$\vec{I} = \bar{\vec{F}}(t - t_0)$

力的冲量还可用平均力表示。

动量定理： $\int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = \vec{P} - \vec{P}_0$

力对时间的持续作用——动量的变化量

功： $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

力对空间的持续作用——力F所做的功

功率： $N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \boxed{= \vec{F} \cdot \vec{v}}$

动能： $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

势能：
$$\begin{cases} E_{p引力} = -G\dfrac{Mm}{r} \\ E_{p重力} = mg\,y \\ E_{p弹力} = \dfrac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

三、动力学基本定律

动量守恒定律：

$$\begin{cases} 若\ \vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=0 \\ 则\ \vec{P}=\sum_i \vec{P}_i=常矢量 \end{cases}$$

动量守恒的条件

动量守恒的内容

1. 实际中当合外力远远小于合内力时，动量守恒定律也可认为成立.
2. 某一方向上合外力为零，则该方向上动量守恒定律.

动能定理：

$$W=E_k-E_{k0}$$

$$W_{外力}+W_{内力}=E_k-E_{k0}$$ （质点组）

动能守恒的条件： $W_{外力}+W_{内力}=0$

理解动量和动能的区别和联系！

保守力所做的功：

$$\begin{cases} 1.\ \text{万有引力的功} & W_{\text{引}} = -\left[\left(-G\dfrac{Mm}{r_2}\right) - \left(-G\dfrac{Mm}{r_1}\right)\right] \\ 2.\ \text{重力的功} & W_{\text{重}} = -(mgy_2 - mgy_1) \\ 3.\ \text{弹性力的功} & W_{\text{弹}} = -\left(\dfrac{1}{2}kx_2^2 - \dfrac{1}{2}kx_1^2\right) \end{cases}$$

保守内力的功：$W_{\text{保守内力}} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$

动能定理：$W = E_k - E_{k0}$

作用在质点上的合外力所做的功等于该质点动能的增量.

$W_{\text{外力}} + W_{\text{内力}} = E_k - E_{k0}$ （质点组）

功能原理：$W_{\text{外力}} + W_{\text{非保守内力}} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_M$

机械能守恒定律：

$$\begin{cases} \text{若}\, W_{\text{外力}} + W_{\text{非保守内力}} = 0 \\ \text{则}\, E_M = E_{M0} \text{或} E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} \end{cases}$$

《刚体》

一、基本物理量

运动学

物理量 $\theta(t)$ $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$

线量与角量之间的关系 $v = r\omega,\ a_\tau = r\beta,\ a_n = r\omega^2$

角量运动学方程

（匀加速转动）

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

动力学

力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ 方向的判定 $\Longleftrightarrow \vec{F}$

转动惯量：$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ $J = \int_m r^2 dm$ $\Longleftrightarrow m$

杆/圆环/圆盘/圆柱/球

刚体定轴转动的转动定律：$\boxed{M = J\beta}$ $\Longleftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

二、基本定理

（1）刚体定轴转动的动能定律

力矩的功： $W=\int_{\theta_0}^{\theta}Md\theta$

力的功，功率，动能

$W=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$N=F\cdot v$

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

力矩的功率： $N=\frac{dW}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega$

力矩对空间的积累效应

定轴转动的转动动能： $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

$W_{外力}=\Delta E_k=E_k-E_{k0}$

定轴转动的动能定理： $\int_{\theta_0}^{\theta}Md\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

质点组动能定理 $W_外+W_内=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$

质点(组)动量 $P=mv$

（2）质点的角动量（动量矩）： $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times(m\vec{v})$

刚体定轴转动的角动量（动量矩）： $L=J\omega$

力矩对时间的积累效应

刚体定轴转动的角动量定理： $\int_{t_0}^{t}Mdt=J\omega-J\omega_0$

$\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=\vec{P}-\vec{P}_0$

角动量守恒定律:

$$\begin{cases} 若 M=\sum_i M_i=0 & （角动量守恒的条件） \\ 则 L=\sum_i L_i=常量 & （角动量守恒的内容） \end{cases}$$

机械能守恒定律:

$$\begin{cases} 若 W_{外力}+W_{非保守内力}=0 \\ 则 E_M=E_{M0} 或 E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0} \end{cases}$$

动能中既包含平动动能还包含转动动能。

刚体应用题

- 求功、动能、角动量　（3-14，求W，用动能定理），
- 综合题
  - 牛三律+转动定律（受力分析法）
    - 对质点：　$F=ma$　　例题3-2
    - 对滑轮：　$M=J\beta$　　习题3-11，3-10
    - $a=R\beta$
    - 画图、受力分析
  - 角动量守恒+机械能守恒　例题3-8
  - 角动量守恒+动能守恒　例题3-9
    - 弹性碰撞问题
  - 多过程的综合型大题　（机械能守恒+角动量守恒+功能原理（动能定理））

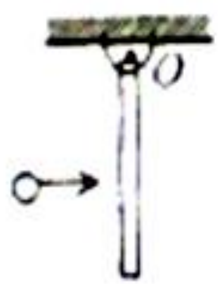
例3-17

1. 质量为 20 g 的子弹沿 X 轴正向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 X 轴正向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块所受冲量的大小为

(A) 9 N·s .　　(B) -9 N·s .

(C) 10 N·s .　　(D) -10 N·s .　　[　　]

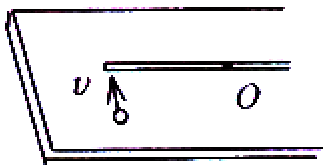
2. 如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴 O 旋转，初始状态为静止悬挂．现有一个小球自左方水平打击细杆．设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统



(A) 只有机械能守恒．　(C) 只有对转轴 O 的角动量守恒．

(B) 只有动量守恒．　(D) 机械能、动量和角动量均守恒．

光滑的水平桌面上有长为 $2l$、质量为 m 的匀质细杆，可绕通过其中点 O 且垂直于桌面的竖直固定轴自由转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$，起初杆静止．有一质量为 m 的小球在桌面上正对着杆的一端，在垂直于杆长的方向上，以速率 v 运动，如图所示．当小球与杆端发生碰撞后，就与杆粘在一起随杆转动．则这一系统碰撞后的转动角速度是



(A) $\frac{lv}{12}$．　(B) $\frac{2v}{3l}$．

(C) $\frac{3v}{4l}$．　(D) $\frac{3v}{l}$．　[　　]

$$lmv=(\frac{1}{3}ml^2+ml^2)\varpi$$

12.（本题 3分）(0742)

一长为 l，质量均匀的链条，放在光滑的水平桌面上，若使其长度的 $\frac{1}{2}$ 悬于桌边下，然后由静止释放，任其滑动，则它全部离开桌面时的速率为 $\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3gl}}$.

$$mg\frac{l}{2}-\frac{1}{2}mg\frac{l}{4}=\frac{1}{2}mv^2$$

9、一质点作匀速率圆周运动时，

(A) 它的动量不变，对圆心的角动量也不变.

(B) 它的动量不变，对圆心的角动量不断改变.

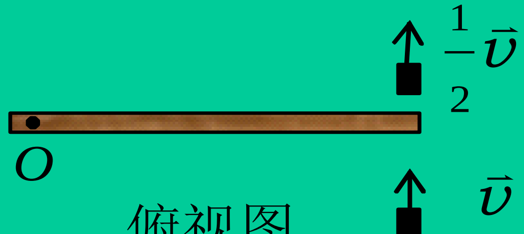
(C) 它的动量不断改变，对圆心的角动量不变.

(D) 它的动量不断改变，对圆心的角动量也不断改变.

20、如图所示，一静止的均匀细棒，长为L、质量为M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴O在水平面内转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$．一质量为m、速率为v的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射出并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为

(A) $\dfrac{mv}{ML}$．　　(B) $\dfrac{3mv}{2ML}$．

(C) $\dfrac{5mv}{3ML}$．　　(D) $\dfrac{7mv}{4ML}$．



俯视图

26、一物体质量为**10 kg**，受到方向不变的力$F=30+40t$ **(SI)**作用，在开始的两秒内，此力冲量的大小等于____140N·s____；若物体的初速度大小为**10 m/s**，方向与力F的方向相同，则在**2s**末物体速度的大小等于____24m/s____.

27、一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为

$$F=400-\frac{4\times10^{5}}{3}t \quad \text{(SI)}$$

子弹从枪口射出时的速率为 **300 m/s**．假设子弹离开枪口时合力刚好为零，则

(1)子弹走完枪筒全长所用的时间t=____0.003s____，

(2)子弹在枪筒中所受力的冲量I=____0.6N·s____，

(3)子弹的质量m=____2g____.

作 业

1-6 某质点的速度为$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-8t\boldsymbol{j}$，已知 $t=0$ 时它过点$(3,-7)$，求该质点的运动方程.

解

因为
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

所以
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(2\boldsymbol{i}-8t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

于是有
$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t(2\boldsymbol{i}-8t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

即
$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=2t\boldsymbol{i}-4t^2\boldsymbol{j}$$

亦即
$$\boldsymbol{r}-(3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j})=2t\boldsymbol{i}-4t^2\boldsymbol{j}$$

故
$$\boldsymbol{r}=(2t+3)\boldsymbol{i}-(4t^2+7)\boldsymbol{j}$$

题 1-7 图

1-8 某质点作直线运动，其运动方程为 $x=1+4t-t^2$，其中 x 的单位为 m，t 的单位为 s. 求：(1) 第 3 s 末质点的位置；(2) 头 3 s 内的位移大小；(3) 头 3 s 内经过的路程.

解 (1) 第 3 s 末质点的位置为

$$x(3)=1+4\times3-3^2=4(\mathrm{m})$$

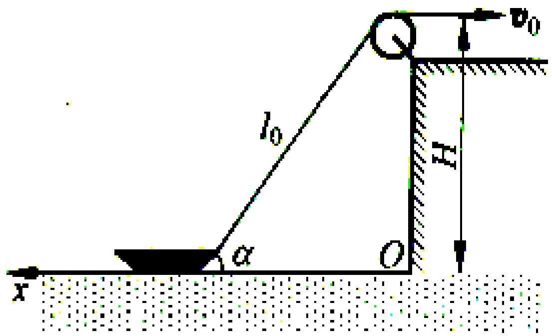
(2) 头 3 s 内的位移大小为

$$x(3)-x(0)=3(\mathrm{m})$$

(3) 因为质点作反向运动时有 $v(t)=0$，所以令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$，即 $4-2t=0$，$t=2$ s，因此头 3 s 内经过的路程为

$$|x(3)-x(2)|+|x(2)-x(0)|=|4-5|+|5-1|=5\ (\mathrm{m})$$

1-10 湖中有一小船，岸边有人用绳子跨过离河面高 H 的滑轮拉船靠岸，如题 1-10 图所示。设绳子的原长为 l_0，人以匀速 v_0 拉绳，试描述小船的运动轨迹并求其速度和加速度。



题 1-10 图

解 建立坐标系如题 1-10 图所示。按题意，初始时刻 $(t=0)$，滑轮至小船的绳长为 l_0，在此后某时刻 t，绳长减小到 l_0-v_0t，此时刻船的位置为

$$x=\sqrt{(l_0-v_0t)^2-H^2}$$

这就是小船的运动方程，将其对时间求导可得小船的速度为

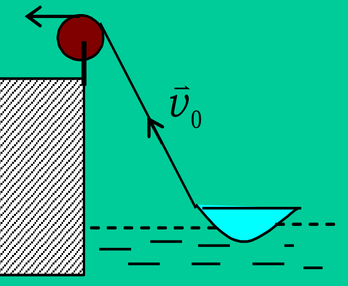
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{(l_0-v_0t)v_0}{\sqrt{(l_0-v_0t)^2-H^2}}=-\frac{v_0}{\cos\alpha}$$

将其对时间再求导可得小船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2H^2}{\sqrt{[(l_0-v_0t)^2-H^2]^3}}=-\frac{v_0^2H^2}{x^3}$$

其中负号说明了小船沿 x 轴的负向（即向岸靠拢的方向）作变加速直线运动，离岸越近（x 越小），加速度的绝对值越大。

2、如图所示，湖中有一小船，有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮拉湖中的船向岸边运动．设该人以匀速率v_0收绳，绳不伸长、湖水静止，则小船的运动是



(A) 匀加速运动． (B) 匀减速运动．

(C) 变加速运动． (D) 变减速运动．

(E) 匀速直线运动．

1-12 一人站在山坡上，山坡与水平面成α角，他扔出一个初速为v_0的小石子，v_0与水平面成θ角，如题1-12图所示.（1）若

证明小石子落到了山坡上距

$\frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$.（2）由此证明对于

在$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$时有最大值 $S_{max}=\frac{v_0^2(\sin}{g\cos}$

解 （1）建立如题1-12图所示的

的运动方程为

$$\begin{cases} x=(v_0\cos\theta)t \\ y=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

当小石子落在山坡上时，有

$$\begin{cases} x=S\cos\alpha \\ y=-S\sin\alpha \end{cases}$$

联立以上四个方程，求解可得小石子在空中飞行的时间（即从抛出到落在山坡上所经历的时间）t所满足的方程为

$$t^2-\frac{2v_0}{g}(\sin\theta+\tan\alpha\cos\theta)t=0$$

解之得

$$t=\frac{2v_0}{g}(\sin\theta+\tan\alpha\cos\theta),\quad t=0$$

但$t=0$是不可能的，因$t=0$时小石子刚刚抛出. 所以小石子落在山坡上的距离为

$$S=\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{(v_0\cos\theta)t}{\cos\alpha}=\frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

（2）给定v_0和α值时，有$S=S(\theta)$，求S的最大值，可令$\frac{dS}{d\theta}=0$，即

$$\frac{2v_0^2\cos(2\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}=0$$

即

$$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

此时$\frac{d^2S}{d\theta^2}<0$，所以S有最大值，该最大值为

$$S_{max}=\frac{v_0^2(\sin\alpha+1)}{g\cos^2\alpha}$$

1-17 某质点从静止出发沿半径为 $R=1\ \mathrm{m}$ 的圆周运动，其角加速度随时间的变化规律是 $\beta=12t^2-6t$，试求质点的角速度和切向加速度的大小.

解 因为

$$\beta=12t^2-6t$$

所以

$$\mathrm{d}\omega=(12t^2-6t)\mathrm{d}t$$

于是有

$$\int_0^\omega \mathrm{d}\omega=\int_0^t (12t^2-6t)\mathrm{d}t$$

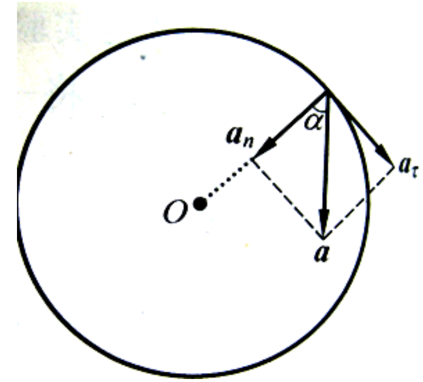
故质点的角速度为

$$\omega=4t^3-3t^2$$

切向加速度为

$$a_\tau=R\beta=12t^2-6t$$

1-19 质点从静止出发沿半径 $R=3$ m 的圆周作匀变速运动，切向加速度 $a_\tau=3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，试求：(1)经过多少时间后质点的总加速度恰好与半径成45°角？(2)在上述时间内，质点所经历的角位移和路程各为多少？



解 因为 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=3$，所以

$$\mathrm{d}v=3\mathrm{d}t \quad 即 \quad \int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 3\mathrm{d}t$$

故质点作圆周运动的瞬时速率为 $v=3t$.

质点的法向加速度的大小为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(3t)^2}{3}=3t^2$$

其方向恒指向圆心. 于是总加速度为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_\tau=(3t^2)\boldsymbol{n}+3\boldsymbol{\tau}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为沿半径指向圆心的单位矢量，$\boldsymbol{\tau}$ 为切向单位矢量.

(1) 设总加速度 $\boldsymbol{a}$ 与半径的夹角为 α，如题 1-19 图所示，则

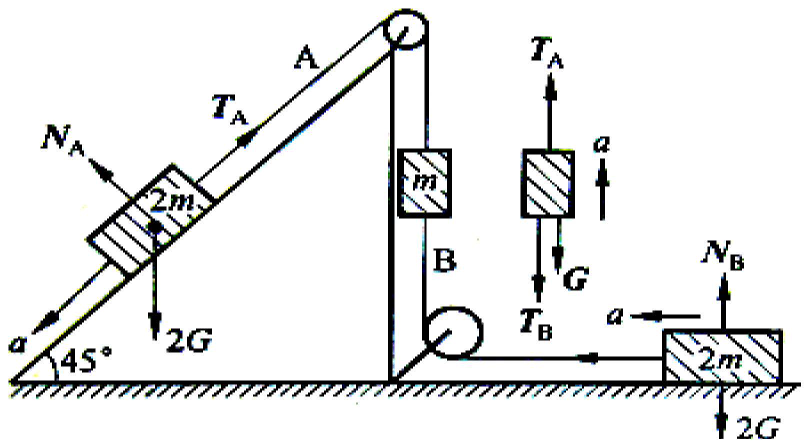
$$a\sin\alpha=a_\tau,\quad a\cos\alpha=a_n$$

当 $\alpha=45°$ 时有 $a_n=a_\tau$，即 $3t^2=3$，$t=1$(负根舍去)，所以 $t=1$ s 时，$\boldsymbol{a}$ 与半径成45°角.

(2) 因为 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=3t$，所以

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^1(3t)\mathrm{d}t$$

2-7 已知条件如题 2-7 图所示，求物体系加速度的大小和 A、B 两绳中的张力(绳与滑轮的质量及所有摩擦均忽略不计).



解 受力分析如题 2-7 图所示. 由于绳子不可伸长，所以设物体系的加速度为 a，则由牛顿第二运动定律可得

对于水平运动的物体有：

$$T_B = 2ma$$

对于竖直运动的物体有：

$$T_A - T_B - mg = ma$$

对于斜面上运动的物体有：

$$2mg\sin 45° - T_A = 2ma$$

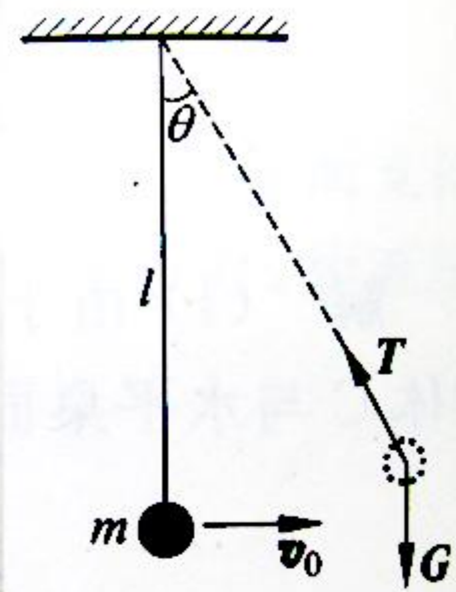
联立以上三个方程可得物体系的加速度为

$$a = \frac{2mg\sin 45° - mg}{5m} = \frac{\sqrt{2}-1}{5}g$$

A、B 两绳子中的张力分别为

$$T_A = \frac{3\sqrt{2}+2}{5}mg,\quad T_B = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{5}mg$$

2-8 长为 l 的轻绳，一端固定，另一端系一质量为 m 的小球，使小球从悬挂着的铅直位置以水平初速度 v_0 开始运动. 如题 2-8 图所示，用牛顿运动定律求小球沿逆时针转过 θ 角时的角速度和绳中的张力.



解 小球在任意位置时的受力分析如图所示，则由牛顿第二运动定律可得

对法向有： $T-mg\cos\theta=m\left(\dfrac{v^2}{l}\right)$

对切向有： $-mg\sin\theta=m\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$

对切向方程两边同乘以 $\mathrm{d}\theta$，得

$$-mg\sin\theta\mathrm{d}\theta=m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\theta$$

即
$$-mg\sin\theta\mathrm{d}\theta=m\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\mathrm{d}(l\omega)$$

亦即
$$g\sin\theta\mathrm{d}\theta=-l\omega\cdot\mathrm{d}\omega$$

于是有
$$\int_0^\theta g\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\int_{\omega_0}^{\omega}l\omega\cdot\mathrm{d}\omega$$

积分可得
$$g(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}l\omega_0^2-\frac{1}{2}l\omega^2$$

所以小球沿逆时针转过 θ 角时的角速度为

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{2}{l}g(\cos\theta-1)}=\frac{1}{l}\sqrt{v_0^2+2gl(\cos\theta-1)}$$

将 $v=l\omega$ 代入法向方程可得绳中的张力为

$$T=m\left(\frac{v_0^2}{l}-2g+3g\cos\theta\right)$$

2-12 一质量为 60 kg 的人以 2 m·s^{-1}的水平速度从后面跳上质量为 80 kg 的小车，小车原来的速度为 1 m·s^{-1}，问：(1)小车的速度将如何变化？(2)人如果迎面跳上小车，小车的速度又将如何变化？

解 若忽略小车与地面之间的摩擦，则小车和人构成的系统动量守恒.

(1) 因为 $m_{车、人}v_{车、人}=m_{车}v_{车}+m_{人}v_{人}$

所以 $v_{车、人}=\dfrac{m_{车}v_{车}+m_{人}v_{人}}{m_{车、人}}=1.43\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，车速变大，方向与原来相同.

(2) 因为 $m_{车、人}v_{车、人}=m_{车}v_{车}-m_{人}v_{人}$

所以 $v_{车、人}=\dfrac{m_{车}v_{车}-m_{人}v_{人}}{m_{车、人}}=-0.286\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，车速变小，方向与原来相反.

2-14 质量为 $m=2\times10^{-3}$ kg 的子弹，在枪筒中前进受到的合力为 $F=400-\dfrac{8000}{9}x$，F 的单位为 N，x 的单位为 m. 子弹射出枪口时的速度为 $300\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，试求枪筒的长度.

解 设枪筒的长度为 l，则根据动能定理有

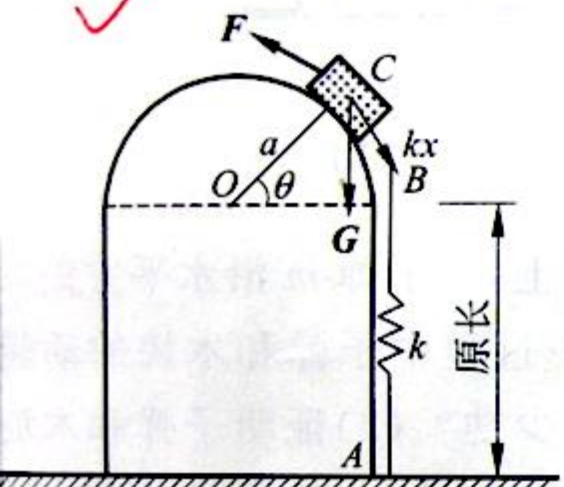
$$\int_0^l F\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\int_0^l \left(400-\frac{8000}{9}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times2\times10^{-3}\times300^2$$

$$l^2-0.9l+\frac{81}{400}=0,\quad \text{即}\left(l-\frac{9}{20}\right)^2=0,\quad \text{得 } l=0.45(\mathrm{m})$$

所以枪筒的长度为 0.45 m.

2-18 一弹簧弹性系数为 k，一端固定在 A 点，另一端连接一质量为 m 的物体，该物体靠在光滑的半径为 a 的圆柱体表面上，弹簧原长为 AB，如题 2-18 图所示. 在变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下物体极其缓慢地沿表面从位置 B 移到了 C，试分别用积分法和功能原理两种方法求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.



题 2-18 图

解 利用积分法求解.

分析物体的受力如题 2-18 图所示，由于物体极其缓慢地沿光滑表面移动，所以有

$$F = mg\cos\theta + kx = mg\cos\theta + ka\theta$$

因此力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = \int_0^\theta F\mathrm{d}s = \int_0^\theta (mg\cos\theta + ka\theta)\mathrm{d}(a\theta) = mga\sin\theta + \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$

利用功能原理求解，力 F 所做的功为

$$W = E_{MC} - E_{MB} = mga\sin\theta + \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$

2-19 如题 2-19 图所示，已知子弹的质量为 $m=0.02$ kg，木块的质量为 $M=8.98$ kg，弹簧的弹性系数为 $k=100\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$，子弹以初速 v_0 射入木块后，弹簧被压缩了 $l=10$ cm. 设木块与平面间的滑动摩擦系数为 $\mu_k=0.2$，不计空气阻力，试求 v_0 的大小.

解 设子弹与木块碰撞后共同前进的速度为 v，因碰撞过程中动量守恒，所以有

$$mv_0=(m+M)v$$

在子弹与木块一同压缩弹簧时，由功能原理得

$$-\mu_k(m+M)gl=\frac{1}{2}kl^2-\frac{1}{2}(m+M)v^2$$

联立以上两式可得子弹的初速度为

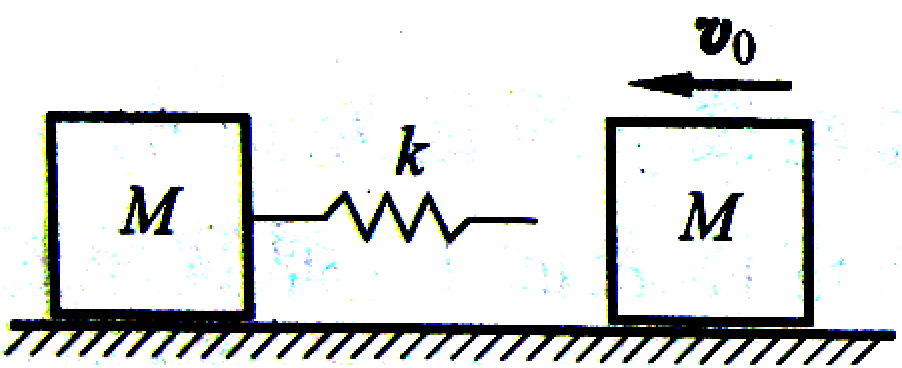
$$v_0=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}kl^2+\mu_k(m+M)gl}{\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m+M}\right)}}=319(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

321.7

2-20 质量为 M 的物体静止于光滑的水平面上，并连接有一轻弹簧如题 2-20 图所示，另一质量为 M 的物体以速度 v_0 与弹簧相撞，问当弹簧压缩到最大时有百分之几的动能转化为势能.

解 当弹簧压缩到最大时系统以同一速度 v 前进，此过程中系统的动量守恒，所以有 $Mv_0=(M+M)v$，于是 $v=\frac{1}{2}v_0$，故弹簧压缩到最大时动能转化为势能的百分比为

$$\frac{\frac{1}{2}Mv_0^2-\frac{1}{2}(M+M)\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2}{\frac{1}{2}Mv_0^2}=50\%$$



3-10 如题 3-10 图所示，两物体的质量分别为 m_1 和 m_2，滑轮的转动惯量为 J，半径为 r。若 m_2 与桌面的摩擦系数为 μ，设绳子与滑轮间无相对滑动，试求系统的加速度 a 的大小及绳子中张力 T_1 和 T_2。

解 分析受力如题 3-10 图所示。m_1 和 m_2 可视为质点，设其加速度分别为 a_1 和 a_2，则由牛顿运动定律得

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - \mu m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$

滑轮作定轴转动，则由转动定律有

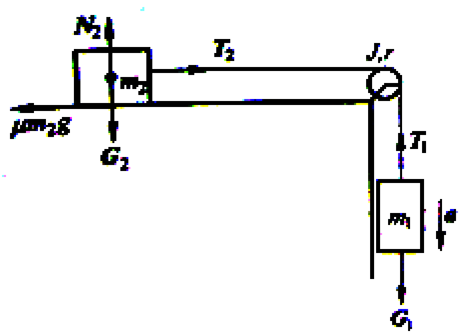
$$T_1 r - T_2 r = J\beta$$

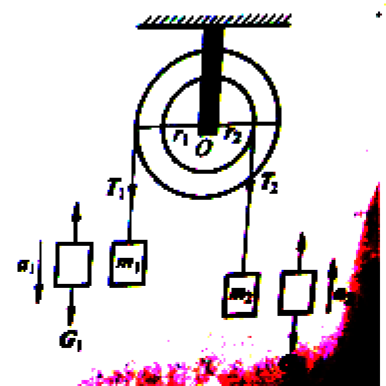
由于绳子与滑轮间无相对滑动，所以

$$a_1 = a_2 = a = \beta r$$

联立以上 4 个方程可得，系统的加速度 a 的大小及绳子中张力 T_1 和 T_2 的大小分别为

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} g, \quad T_1 = \frac{m_2 + \mu m_2 + \frac{J}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} m_1 g, \quad T_2 = \frac{m_1 + \mu m_1 + \frac{\mu J}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} m_2 g$$





3-11 如题 3-11 图所示. 两个半径不同的同轴滑轮固定在一起，两滑轮的半径分别为 r_1 和 r_2，两个滑轮的转动惯量分别为 J_1 和 J_2，绳子的两端分别悬挂着两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体. 设滑轮与轴之间的摩擦力忽略不计，滑轮与绳子之间无相对滑动，绳子的质量也忽略不计，且绳子不可伸长. 试求两物体的加速度和绳子的张力.

解 分析受力如题 3-11 图所示. m_1 和 m_2 可视为质点，设其受绳子的拉力分别为 T_1 和 T_2，加速度的大小分别为 a_1 和 a_2，则由牛顿第二运动定律得

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$

滑轮作定轴转动，则由转动定律有

$$T_1 r_1 - T_2 r_2 = (J_1 + J_2)\beta$$

由于绳子与滑轮间无相对滑动，所以

$$a_1 = \beta r_1, \quad a_2 = \beta r_2$$

联立以上 5 个方程可得，两物体的加速度和绳子中的张力分别为

$$a_1 = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2) r_1 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

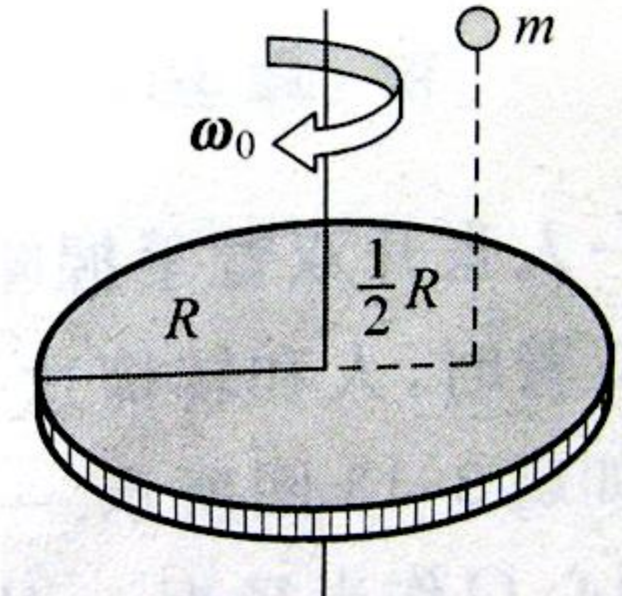
$$a_2 = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2) r_2 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

$$T_1 = \frac{(J_1 + J_2 + m_2 r_2^2 + m_2 r_1 r_2) m_1 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

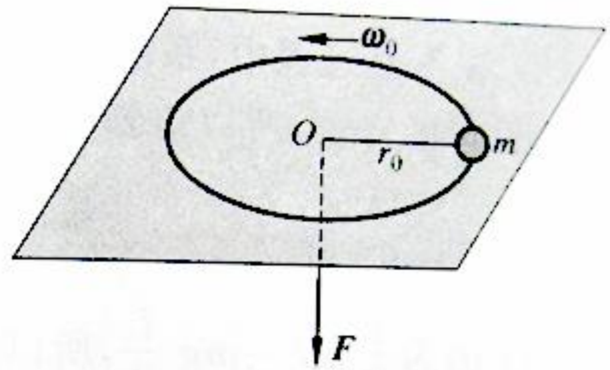
$$T_2 = \frac{(J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_1 r_1 r_2) m_2 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

3-5 如题 3-5 图所示．有一半径为 R、质量为 M 的匀质圆盘水平放置，可绕通过盘心的铅直轴作定轴转动，圆盘对轴的转动惯量 $J=\frac{1}{2}MR^2$．当圆盘以角速度 ω_0 转动时，有一质量为 m 的橡皮泥（可视为质点）铅直落在圆盘上，并粘在距转轴 $\frac{1}{2}R$ 处．那么橡皮泥和盘的共同角速度 $\omega=$ $\underline{\frac{2M}{2M+m}\omega_0}$．

$\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega_0=\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega+m\cdot(\frac{1}{2}R)^2\cdot\omega$



3-13 如题 3-13 图所示，一质量为 m 的小球由一绳子系着，以角速度 ω_0 在无摩擦的水平面上，绕圆心 O 作半径为 r_0 的圆周运动. 若在通过圆心 O 的绳子端作用一竖直向下的拉力 $\boldsymbol{F}$，小球则作半径为 $\frac{r_0}{2}$ 的圆周运动. 试求：(1) 小球新的角速度 ω；(2) 拉力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.



题 3-13 图

解 (1) 在拉力 $\boldsymbol{F}$ 拉小球的过程中，由于拉力 $\boldsymbol{F}$ 通过了轴心，因此小球在水平面上转动的过程中不受外力矩的作用，故其角动量守恒. 于是有

$$J_0\omega_0 = J\omega$$

即

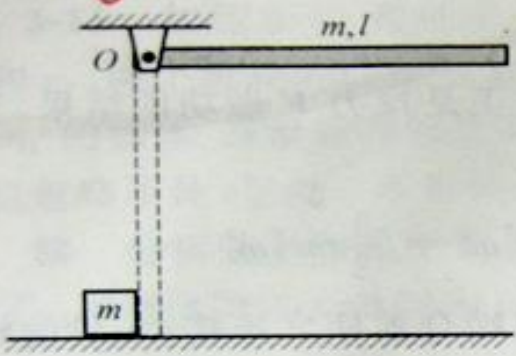
$$(mr_0^2)\omega_0 = \left[m\left(\frac{1}{2}r_0\right)^2\right]\omega$$

小球新的角速度 $\omega = 4\omega_0$.

(2) 随着小球转动角速度的增加，其转动动能也在增加，这正是拉力 $\boldsymbol{F}$ 做功的结果. 于是由定轴转动的转动定理得拉力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r_0}{2}\right)^2(4\omega_0)^2 - \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2 = \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$$

3-16 如题 3-16 图所示. 一均匀细棒长为 l，质量为 m，可绕通过端点 O 的水平轴在竖直平面内无摩擦地转动. 棒在水平位置时释放，当它落到竖直位置时与放在地面上一静止的物体碰撞. 该物体与地面之间的摩擦系数为 μ，其质量也为 m，物体滑行 s 距离后停止. 求碰撞后杆的转动动能.



题 3-16 图

解 根据题意可知此题包含了 3 个物理过程.

第一过程为均匀细棒的下落过程. 在此过程中，以棒和地球构成的系统为研究对象，棒受的重力为保守力，轴对棒的支持力始终不做功，所以系统的机械能守恒，则

$$mg\,\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

第二过程为均匀细棒与物体的碰撞过程. 在此过程中，以棒和物体构成的系统为研究对象，物体所受的摩擦力对转轴 O 的力矩与碰撞的冲力矩相比较可忽略，所以系统的角动量守恒，则

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega=\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'+mvl$$

其中 ω' 为碰撞后瞬时棒的角速度，v 为碰撞后瞬时物体与棒分离时物体的速率.

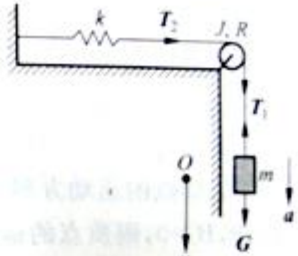
第三过程为分离以后的过程. 对于棒而言，棒以角速度 ω' 继续转动；对于物体而言，物体在水平面内仅受摩擦力的作用，由质点的动能定律得

$$\frac{1}{2}mv^2=\mu mgs$$

联立以上 3 个方程可得碰撞后杆的转动动能为

$$E_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2=\frac{1}{6}m\left(\sqrt{3gl}-3\sqrt{2\mu gs}\right)^2$$

3-17 如题 3-17 图所示，一弹性系数为 k 的轻弹簧与一轻柔绳相连，该绳跨过一半径为 R、转动惯量为 J 的定滑轮，绳的另一端悬挂一质量为 m 的物体．开始时弹簧无伸长，物体由静止释放．滑轮与轴之间的摩擦可以忽略不计．当物体下落 h 时，试求物体的速度 v．(1)用牛顿定律和转动定律求解；(2)用守恒定律求解．



题 3-17 图

解 (1) 用牛顿定律和转动定律求解．

建立坐标系及受力分析如题 3-17 图所示．则由牛顿定律和转动定律得

对于物体有：　$mg-T_1=ma$

对于滑轮有：　$(T_1-T_2)R=J\beta$

对于弹簧有：　$T_2=kx$

物体的加速度与滑轮边缘的切向加速度相同，即

$$a=\beta R$$

联立以上 4 个方程可得

$$a=\frac{mg-kx}{m+\frac{J}{R^2}}$$

因为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

所以有

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{mg-kx}{m+\frac{J}{R^2}}$$

整理并积分有

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^h\left(\frac{mg-kx}{m+\frac{J}{R^2}}\right)\mathrm{d}x$$

解之可得物体的速度为　$v=\sqrt{\dfrac{2mgh-kh^2}{m+\frac{J}{R^2}}}$

(2) 用守恒定律求解．

由于滑轮和轴之间的摩擦忽略不计，系统（弹簧、滑轮、物体和地球）仅受保守力（重力和弹力）的作用，所以系统的机械能守恒，若以物体 m 的初始位置处为势能零点，则

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{2}kh^2$$

解之可得物体的速度为　$v=\sqrt{\dfrac{2mgh-kh^2}{m+\frac{J}{R^2}}}$

《热学》要求：

1. 能从宏观和统计意义三理解压强、温度、内能等概念。
2. 理解理想气体的压强公式和温度公式的物理意义
3. 了解麦克斯韦速率分布律及速率分布函数和速率分布曲线的物理意义。了解气体热运动的算术平均速率、均方根速率和最可几速率的求法和意义。
4. 理解气体分之平均能量按自由度均分原则，并会用该定理计算理想气体的内能。
5. 掌握功和热量的概念。理解平衡过程。理解绝热过程的过程方程。掌握热力学第一定律。能熟练地分析、计算理想气体各等职过程和绝热过程的功、热量、内能改变量及循环的效率。了解卡诺热机和制冷机的工作原理。
6. 了解热力学第二定律的两种表述。了解热力学第二定律的统计意义及无序性。

一、理想气体状态方程：

$$\begin{cases} \boxed{PV = \dfrac{M}{\mu} RT} \\ P = nkT \ \left(k = \dfrac{R}{N_A}\right) \end{cases}$$

$R = 8.31 \quad \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

$k = 1.38 \times 10^{-23} \quad \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

(玻耳兹曼常数)

$$n = \frac{N}{V}$$

(分子数密度)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} m\overline{v^2}$$

(平均平动动能)

压强

$$\boxed{p = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon}}$$

温度

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT}$$

内能

$$\boxed{E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT}$$

从宏观和统计两个方面理解三个概念的物理意义！

宏观量 T 是标志分子热运动剧烈程度的物理量，
分子无规则运动越剧烈，气体的温度越高。

二、 能量均分定理：

定理内容；自由度数*i*的计算

每一个自由度的平均动能 $\frac{1}{2}kT$

一个分子 的总平均动能 $\bar{\varepsilon}_k = \frac{i}{2}kT$

（单原子：i=3，双原子：i=5，多原子：i=6）

M/μ 摩尔理想气体的内能 $E = \frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RT$

会计算理想气体的内能。

三、速率分布函数

$$f(v)=\frac{dN}{Ndv}$$

理解物理意义！

速率在 v 附近的单位速率区间的分子数占分子总数的百分比.

三种速率

最概然速率： $v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$

平均速率： $\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$

方均根速率： $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$

（一） 基本概念、基本规律:

（1）什么是功，热量，平衡过程

定容、定压摩尔热容:

$$c_v = \frac{i}{2}R \qquad c_p = c_v + R$$

比热容比: $\gamma = c_p / c_v$

（2）热力学第一定律:

$$\boxed{Q = E_2 - E_1 + W}$$

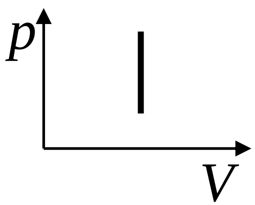
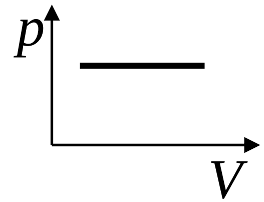
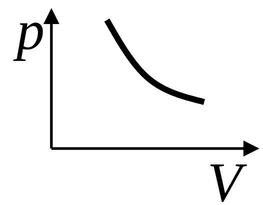
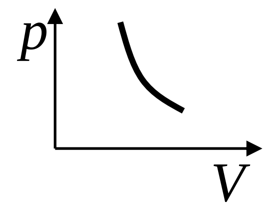
吸热Q为正，放热Q为负
系统对外做功时，W取正值
外界对系统做功时，W取负值

$$Q = E_2 - E_1 + \int_{V_1}^{V_2} PdV$$

研究对象为气体时

熟练计算各等值过程的W、Q、△E

热力学第一定律对于理想气体各等值过程的应用

	等体过程	等压过程	等温过程	绝热过程
P-*V*图				
过程方程	$\frac{p}{T}=$恒量	$\frac{V}{T}=$恒量	$pV=$恒量	$PV^{\gamma}=C,\ V^{\gamma-1}T=C_2$ $P^{\gamma-1}T^{-\gamma}=C_3$
功W	0	$P(V_2-V_1)=\frac{M}{\mu}R(T_2-T_1)$	$\frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$-\frac{M}{\mu}C_V(T_2-T_1)$
热量Q	$\frac{M}{\mu}C_V(T_2-T_1)$	$\boldsymbol{\frac{M}{\mu}C_p(T_2-T_1)}$	$\frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$	0
热力学能增量 ΔE	$\frac{M}{\mu}C_V(T_2-T_1)$	$\frac{M}{\mu}C_V(T_2-T_1)$	0	$\frac{M}{\mu}C_V(T_2-T_1)$
第一定律	$Q_V=\Delta E$	$Q_P=\Delta E+W_P$	$Q_T=W_T$	$W=-\Delta E$

（3）循环 什么是循环？循环的特点？计算循环中的W、Q等

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

（4）热机效率：

热机： $\eta = \dfrac{A}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}$

致冷： $w = \dfrac{Q_2}{A} = \dfrac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$

卡诺热机： $\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$

卡诺致冷： $w = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$

（5）热力学第二定律：

1. 开尔文表述

2. 克劳修斯表述

*不可逆过程，可逆过程

什么是卡诺循环？
卡诺热机的效率如何计算？

习题5-10, 5-12, 5-14, 5-15

A、B、C三个容器中皆装有理想气体，它们的分子数密度之比为$n_A:n_B:n_C=4:2:1$，而分子的平均平动动能之比为 $\overline{w}_A:\overline{w}_B:\overline{w}_C=1:2:4$ ，则它们的压强之比

$p_A:p_B:p_C=$ 1:1:1

$$\boxed{p=\frac{2}{3}n(\frac{1}{2}m\overline{v^2})=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon}}$$

有两瓶气体，一瓶是氦气，另一瓶是氢气，若它们的压强、体积、温度均相同，则氢气的内能是氦气的 5:3 倍。

$$PV=\frac{M}{\mu}RT \qquad E=\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RT$$

一瓶氦气和一瓶氮气密度相同，分子平均平动动能相同，而且它们都处于平衡状态，则它们

A 温度相同、压强相同

B温度、压强均不相同

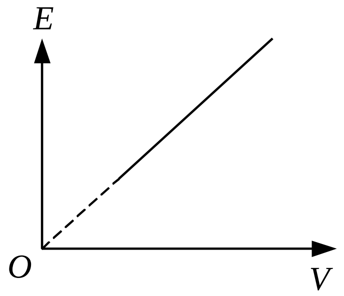
C温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强

D温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$P\cancel{V} = \frac{\rho \cancel{V}}{\mu} RT$$

3. 一定质量的理想气体的内能E随体积V的变化关系为一直线(其延长线过E~V图的原点)，则此直线表示的过程为



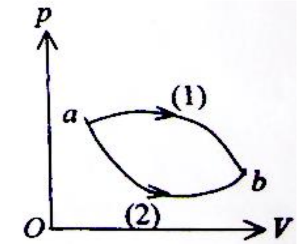
(A) 等温过程.　　　　(B) 等压过程.

(C) 等体过程.　　　　(D) 绝热过程.

12、一卡诺热机(可逆的)，低温热源的温度为27°C，热机效率为40％，其高温热源温度为500______**K. 今欲将该热机效率提高到50％，若低温热源保持不变，则高温热源的温度应增加**100______**K.**

$$\eta_{可} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

3. 1 mol 理想气体从 $p-V$ 图上初态 a 分别经历如图所示的(1) 或(2)过程到达末态 b. 已知 $T_a<T_b$ ，则这两过程中气体吸收的热量 Q_1 和 Q_2 的关系是

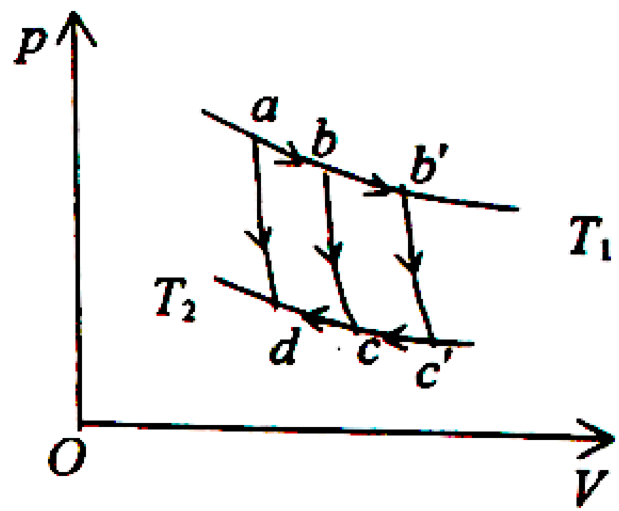


(A) $Q_1> Q_2>0$.　　(B) $Q_2> Q_1>0$.

(C) $Q_2< Q_1<0$.　　(D) $Q_1< Q_2<0$.

(E) $Q_1= Q_2>0$.

4. 如果卡诺热机的循环曲线所包围的面积从图中的 $abcda$ 增大为 $ab'c'da$，那么循环 $abcda$ 与 $ab'c'da$ 所作的净功和热机效率变化情况是：



(A) 净功增大，效率提高.

(B) 净功增大，效率降低.

(C) 净功和效率都不变.

(D) 净功增大，效率不变.

[　　　]

室温下 1 mol 双原子分子理想气体的压强为 p，体积为 V，则此气体分子的平均动能为 $\frac{5}{2}PV/N_A$ 或 $\frac{5}{2}kPV/R$

14.（本题 3分）(4331)

一热机从温度为 727℃的高温热源吸热，向温度为 527℃的低温热源放热．若热机在最大效率下工作，且每一循环吸热 2000 J，则此热机每一循环作功 400 J.

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

1. 等值过程的W、Q、ΔE

一定量的某单原子分子理想气体装在封闭的汽缸里。已知气体的初压强p_1=1atm，体积V_1=1L，现将该气体在等压下加热直到体积为原来的两倍，然后在等体积下加热直到压强为原来的2倍，最后作绝热膨胀，直到温度下降到初温为止。

(1) 在$p-V$图上将整个过程表示出来;

(2) 试求在整个过程中气体内能的改变;

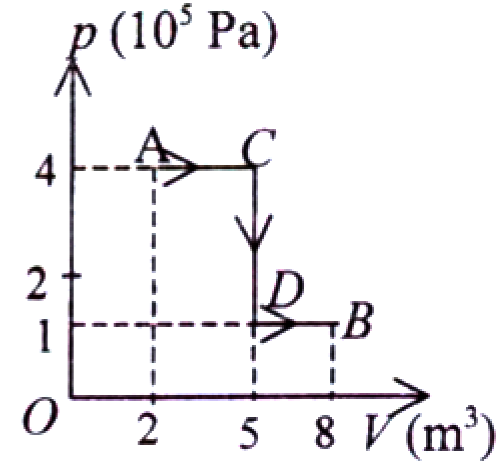
(3) 试求在整个过程中气体所吸收的热量;

(4) 试求在整个过程中气体所作的功。

(1 atm = 1.013×10^5 Pa)

2. 循环过程的W、Q、ΔE

一定量的理想气体，从 A 态出发，经 $p-V$ 图中所示的过程到达 B 态，试求在这过程中，该气体吸收的热量.



解：由图可得

A 态： $p_A V_A = 8\times10^5$ J　　1 分

B 态： $p_B V_B = 8\times10^5$ J　　1 分

∵ $p_A V_A = p_B V_B$，根据理想气体状态方程可知

$T_A = T_B$，　$\Delta E = 0$　　4 分

根据热力学第一定律得：

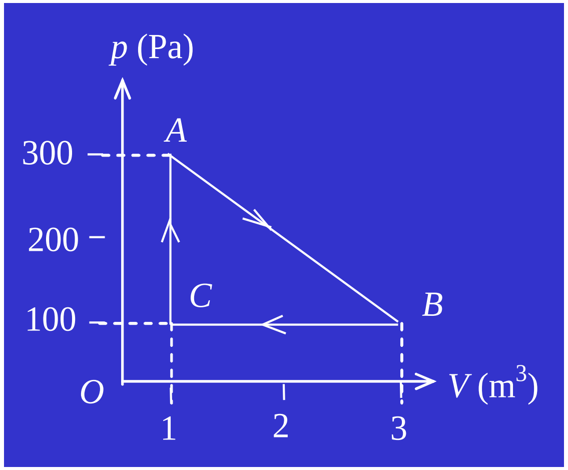
$Q = W = p_A(V_C - V_A) + p_B(V_B - V_D) = 1.5\times10^6$ J　　4 分

47、一定量的某种理想气体进行如图所示的循环过程。已知气体在状态*A*的温度为$T_A = 300\ \mathrm{K}$，求

(1) 气体在状态*B*、*C*的温度；

(2) 各过程中气体对外所作的功；

(3) 经过整个循环过程，气体从外界吸收的总热量(各过程吸热的代数和)。



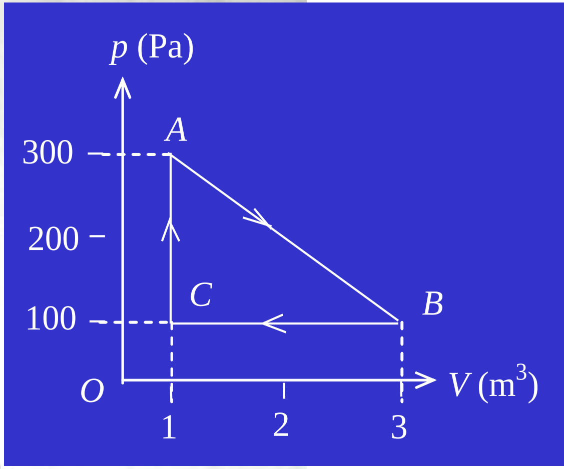
解：由图，p_A=300 Pa，$p_B = p_C$=100 Pa；$V_A=V_C$=1 m^3，V_B=3 m^3.

(1) $C \rightarrow A$ 为等体过程，据方程 $p_A/T_A = p_C/T_C$ 得

$$T_C = T_A p_C / p_A = 100 \text{ K}.$$

$B \rightarrow C$ 为等压过程，据方程 $V_B/T_B = V_C/T_C$ 得

$$T_B = T_C V_B / V_C = 300 \text{ K}.$$



(2) 各过程中气体所作的功分别为

$A \rightarrow B$: $$W_1 = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_C) = 400 \text{ J}.$$

$B \rightarrow C$: $$W_2 = p_B (V_C - V_B) = -200 \text{ J}.$$

$C \rightarrow A$: $$W_3 = 0$$

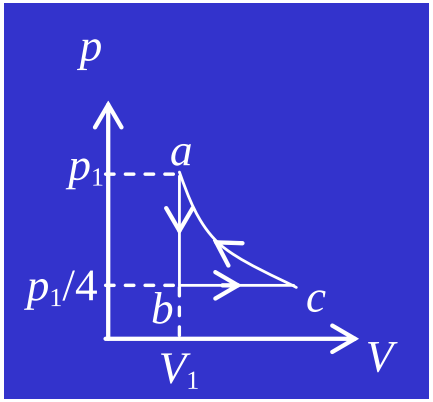
(3) 整个循环过程中气体所作总功为

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 200 \text{ J}.$$

因为循环过程气体内能增量为 $\Delta E=0$，因此该循环中气体总吸热

$$Q = W + \Delta E = 200 \text{ J}.$$

2. 一定量的某种理想气体从状态a（p1，V1）经等体过程到达b（p1/4），再经等压到c，最后经等温完成循环。求对外做功和吸收的热量。



2 解： 设c状态体积为V2，则由a，c两状态的温度相同，p1V1=p1V2/4，所以V2=4V1；

a(p1,v1,T1) b(p1/4,v1,T1/4),c(p1/4,4v1,T1)

循环过程 $\Delta E = 0, Q = W$

a ⟶ b等体： $W1 = 0$

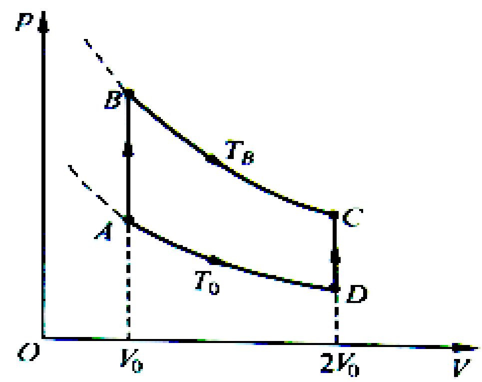
b ⟶ c等压： $W2 = p(V2 - V1)/4 = 3p1V1/4$

c ⟶ a等温： $W3 = \dfrac{M}{\mu} RT_1 \ln\left(\dfrac{Va}{Vc}\right) = p1V1\ln\left(\dfrac{V1}{4V1}\right) = -p1V1\ln 4$

$$\therefore W = W1 + W2 + W3 = [(3/4) - \ln 4]p1V1$$

$$Q = W = [(3/4) - \ln 4]p1V1$$

5-10 如题 5-10 图所示，1 mol 的氢气，在压强为 1.013×10^5 Pa，温度为 20℃ 时，体积为 V_0，现通过以下两种过程使其达到同一状态：(1) 保持体积不变，加热使其温度升高到 80℃，然后令其作等温膨胀，体积变为 $2V_0$；(2) 先使其作等温膨胀至体积为 $2V_0$，然后保持体积不变，加热使其温度升高到 80℃. 试分别计算以上两种过程中，气体吸收的热量，对外所做的功和热力学能的增量.



题 5-10 图

解 (1) 氢气的等体摩尔热容为 $C_{V,m}=\frac{5}{2}R$，在 A—B 等体过程中，气体不做功，热力学能增量为 ΔE_1

$$\Delta E_1=C_{V,m}\Delta T=\frac{5}{2}R\Delta T=\frac{5}{2}\times8.31\times60=1.25\times10^3(\text{J})$$

在 B—C 等温过程中热力学能不变，氢气体积从 V_0 变化到 $2V_0$，气体对外所做的功为

$$W_1=RT\ln\frac{2V_0}{V_0}=8.31\times353\times\ln2=2.03\times10^3(\text{J})$$

在 A—B—C 过程中，气体吸收热量为

$$Q_{ABC}=\Delta E_1+W_1=1.25\times10^3+2.03\times10^3=3.28\times10^3(\text{J})$$

(2) 在 A—D 等温过程中，热力学能不变，气体对外做功为 W_2

$$W_2=RT_0\ln\frac{2V_0}{V_0}=8.31\times293\times\ln2=1.69\times10^3(\text{J})$$

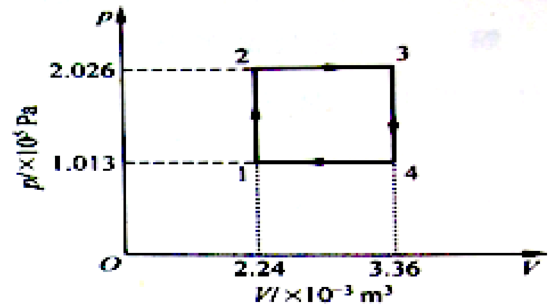
在 D—C 等体吸热过程中气体不做功，热力学能增量为 ΔE_2

$$\Delta E_2=C_V\Delta T=\frac{5}{2}R\Delta T=\frac{5}{2}\times8.31\times60=1.25\times10^3(\text{J})$$

在 A—D—C 过程中，气体吸收热量为 Q_{ADC}

$$Q_{ABC}=\Delta E_2+W_2=1.25\times10^3+1.69\times10^3=2.94\times10^3(\text{J})$$

5-12 有 1 mol 单原子理想气体做如题 5-12 图所示的循环过程. 求气体在循环过程中吸收的净热量和对外所做的净功, 并求循环效率.



题 5-12 图

解 气体经过循环所做的净功 W 为题 5-12 图中 1—2—3—4—1 线所包围的面积, 即

$$W=(p_2-p_1)(V_2-V_1)$$
$$=(2.026-1.013)\times10^5\times(3.36-2.24)\times10^{-3}$$
$$=1.13\times10^2(\mathrm{J})$$

根据理想气体的状态方程 $pV=\frac{M}{\mu}RT$ 得

$$T_1=\frac{\mu}{M}\frac{p_1V_1}{R}=1\times\frac{1.013\times10^5\times2.24\times10^{-3}}{8.31}=27.3(\mathrm{K})$$

$$T_2=\frac{\mu}{M}\frac{p_2V_2}{R}=54.6(\mathrm{K})$$

$$T_3=\frac{\mu}{M}\frac{p_3V_3}{R}=81.9(\mathrm{K})$$

$$T_4=\frac{\mu}{M}\frac{p_4V_4}{R}=41.0(\mathrm{K})$$

在等体过程 1—2, 等压过程 2—3 中, 气体所吸热量 Q_{12}、Q_{23} 分别为

$$Q_{12}=C_{V,m}(T_2-T_1)=\frac{3}{2}\times8.31\times(54.6-27.3)=3.40\times10^2(\mathrm{J})$$

$$Q_{23}=C_{p,m}(T_3-T_2)=\frac{5}{2}\times8.31\times(81.9-54.6)=5.67\times10^2(\mathrm{J})$$

在等体过程 3—4, 等压过程 4—1 中, 气体所放热量 Q_{34}、Q_{41} 分别为

$$Q_{34}=C_{V,m}(T_4-T_3)=\frac{3}{2}\times8.31\times(41.0-81.9)=-5.10\times10^2(\mathrm{J})$$

$$Q_{41}=C_{p,m}(T_1-T_4)=\frac{5}{2}\times8.31\times(27.3-41.0)=-2.85\times10^2(\mathrm{J})$$

气体经历一个循环所吸收的热量之和为

$$Q_1=Q_{12}+Q_{23}=9.07\times10^2(\mathrm{J})$$

气体在此循环中所放出的热量之和为

$$Q_2=|Q_{34}|+|Q_{41}|=7.95\times10^2(\mathrm{J})$$

式中 Q_2 是绝对值.

5-13 一卡诺热机的低温热源的温度为 7℃，效率为 40%，若要将其效率提高到 50%，问高温热源的温度应提高多少？

解 设高温热源的温度分别为 T_1 和 T_1'，低温热源的温度为 T_2，则有

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1'}$$

上式变形得

$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta}, \quad T_1' = \frac{T_2}{1-\eta'}$$

高温热源温度需提高的温度为

$$\Delta T = T_1' - T_1 = \frac{T_2}{1-\eta'} - \frac{T_2}{1-\eta} = \frac{280}{1-0.5} - \frac{280}{1-0.4} = 93.3(\mathrm{K})$$

电磁场 总复习

静电场 ——静止点电荷产生的电场

静磁场 ——稳恒电流产生的磁场

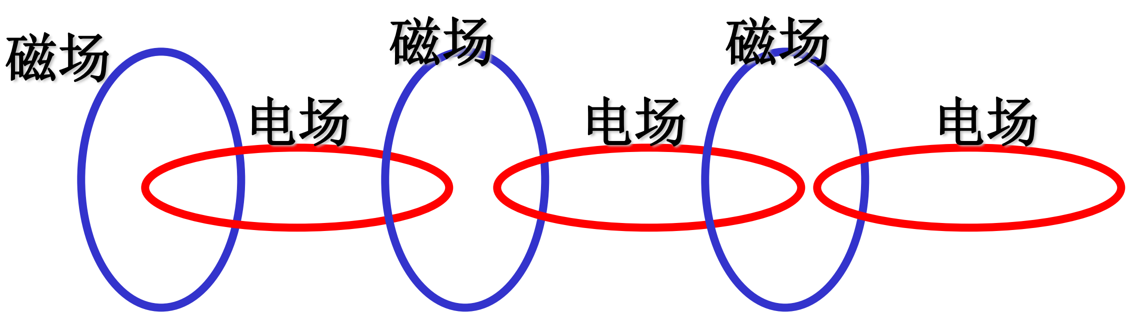
稳恒电磁场

法拉第电磁感应定律

涡旋电场 ⇄ **变化的磁场**

麦氏位移电流假说

时变电磁场



电磁波

电磁场 要求

1. 掌握静电场的电场强度和电势的概念以及场的叠加原理。掌握电势与场强的积分关系。能计算一些简单问题中的场强和电势。

微积分法求E、U

高斯定理求E

2. 理解静电场的基本规律：高斯定理和环路定理。掌握用高斯定理计算场强的条件和方法，并能熟练应用。

3. 掌握磁感应强度的概念及毕奥---沙伐尔定律。能计算一些简单问题中的磁感应强度。

毕奥---沙伐尔定律及其特例

4. 理解稳恒磁场的基本规律：磁场高斯定律和安培环路定理。掌握用安培环路定理计算磁感应强度的条件和方法，并能熟练应用。

安培环路定理

感应电动势的计算

5. 掌握法拉第电磁感应定律和楞次定律。理解动生电动势和感生电动势的概念和规律，并能计算感应电动势。

第六章 静电场 复习 （两个概念、三个定律）

库仑定律： $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^3}$

电场强度： $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$

静电场的高斯定律： $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$

静电场的环路定律： $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

电势： $U_P = \dfrac{\varepsilon_P}{q_0} = \int_P^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

电势相关概念，重在理解！

静电场的环路定律: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

电势能: $\varepsilon_P = q_0 \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电势: $U_P = \dfrac{\varepsilon_P}{q_0} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电势差: $U_{PQ} = U_P - U_Q = \int_P^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电场力所做的功: $W_{PQ} = q_0 \int_P^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0(U_P - U_Q)$

要求：1、求电场强度E；2、求电势

求电场强度的两种方法：

例

（一）用电场的叠加原理

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

一个电荷：$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$

点电荷组：$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i}$

电荷连续分布体：$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}$

$$\begin{cases}\text{线：} & dq=\eta dl\\ \text{面：} & dq=\sigma dS\\ \text{体：} & dq=\rho dV\end{cases}$$

（二）用静电场的高斯定律

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}q_i$$

静电场的高斯定律:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

1. 场强E和电荷q各代表什么意思?
2. 等式两边各代表什么?

电通量 ϕ_e　　高斯面所包围的总电荷

解题步骤:

① 分析对称性，作高斯面;

② 写出高斯定理;

③ 求积分，计算场强

例

求电势的两种方法:

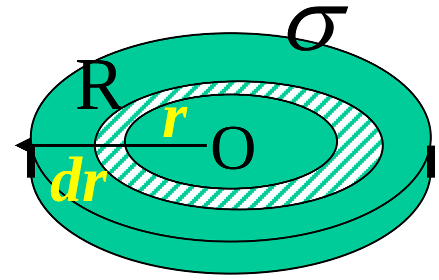
（一）用电势的叠加原理

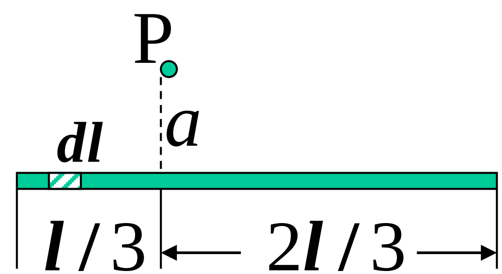
① $dq=\eta dl,\sigma dS,\rho dV$

② $dU=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r}$

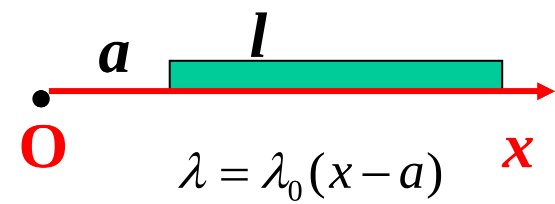
③ $U=\int dU=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\dfrac{dq}{r}$

带电圆盘，求中心O点电势。





（二）用电势的定义式



$$U_P=\frac{\varepsilon_P}{q_0}=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

矢量！

得先求得E

可以直接拿来用的电场强度结论:

- 均匀带电球面 $r > R$ $\quad \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

  $r < R$ $\quad E = 0$

- 无限长均匀带电直导线 $\quad E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_0}$

- 无限大带电平行板 $\quad E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

可以直接拿来用的电势的结论:

☀ 点电荷 $\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

$$\boxed{U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}$$

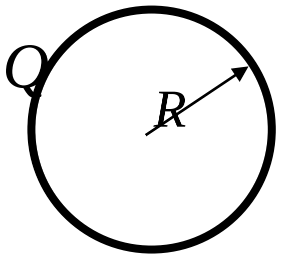
☀ 均匀带电圆环中心:

$$\boxed{U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}}$$

☀ 均匀带电球面

$r>R$ $\quad U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$

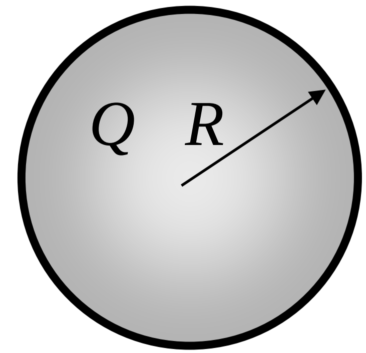
$r\le R$ $\quad U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}$



$$U_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_r^{R}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_R^{\infty}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}$$

☀ 均匀带电球体（习题6-15）

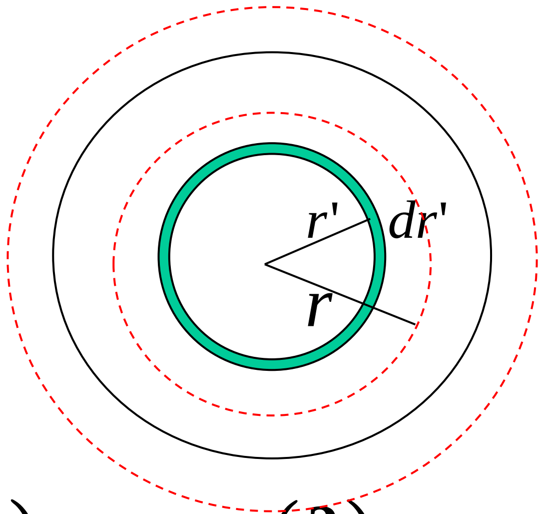


$r < R$ $$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

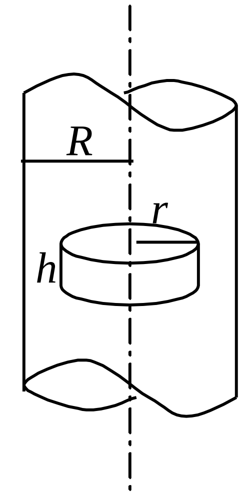
$r > R$ $$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$



（1） $\rho=\rho_0$ **（2）** $\rho=\rho_0(1-\frac{r}{R})$



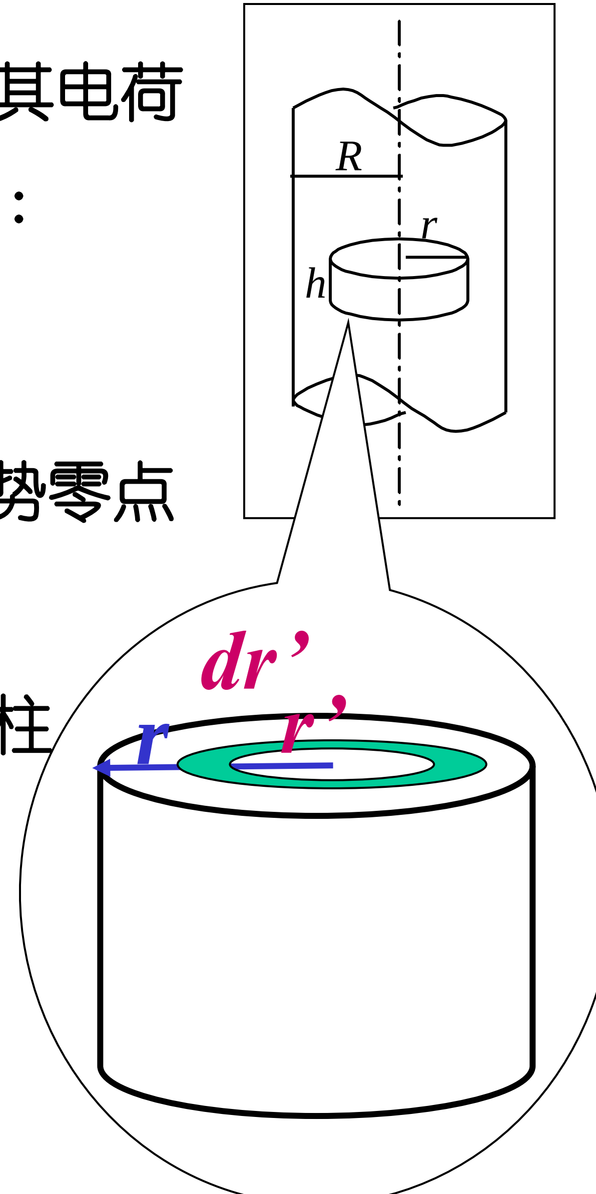
$$\rho = Ar$$

球内外的场强分布。

44. 一半径为R的“无限长”圆柱形带电体，其电荷体密度为 $\rho=Ar$ ($r\leq R$)，式中A为常量。试求：

(1) 圆柱体内、外各点场强大小分布；

(2) 选与圆柱轴线的距离为l ($l>R$) 处为电势零点，计算圆柱体内、外各点的电势分布。



解：(1)如图所示，取半径为r、高为h的高斯圆柱面。面上各点场强大小为E并垂直于柱面。则穿过该柱面的电场强度通量为：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=2\pi rhE$$

为求高斯面内的电荷，$r<R$时，取一半径为r'，厚$\mathrm{d}\,r'$、高h的圆筒，其电荷为

$$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V=Ar'\cdot 2\pi hr'\,\mathrm{d}\,r'$$

则包围在高斯面内的总电荷为

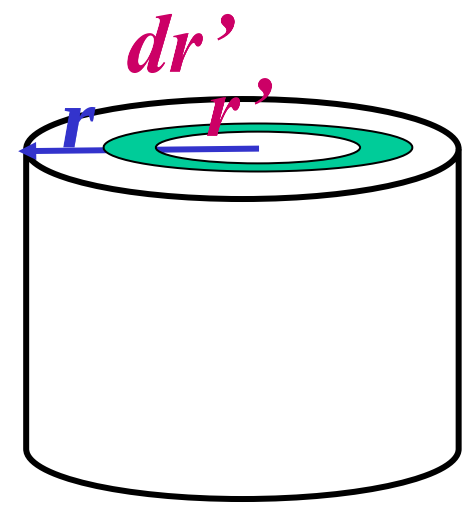
$$\int_V \mathrm{d}q=\int_0^r 2\pi Ahr'^2\,\mathrm{d}\,r'=\frac{2}{3}\pi Ahr^3$$

由高斯定理得

$$2\pi rhE=\frac{2\pi Ahr^3}{3\varepsilon_0}$$

解出

$$E=\frac{Ar^2}{3\varepsilon_0}\quad(r\le R)$$



$r>R$时，包围在高斯面内总电荷为：

$$\int_V \mathrm{d}q = \int_0^R 2\pi A h r'^2 \,\mathrm{d}r' = \frac{2}{3}\pi A h R^3$$

$$2\pi r h E = \frac{2\pi A h R^3}{3\varepsilon_0}$$

解出

$$\begin{cases} E = \dfrac{AR^3}{3\varepsilon_0 r} & (r>R) \\ E = \dfrac{Ar^2}{3\varepsilon_0} & (r\le R) \end{cases}$$

(2) 选与圆柱轴线的距离为 l ($l>R$) 处为电势零点，计算圆柱体内、外各点的电势分布。

$r \le R$时

$$U=\int_r^l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_R^l \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_r^R \frac{A}{3\varepsilon_0}r^2\,\mathrm{d}r+\int_R^l \frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$=\frac{A}{9\varepsilon_0}\left(R^3-r^3\right)+\frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{l}{R}$$

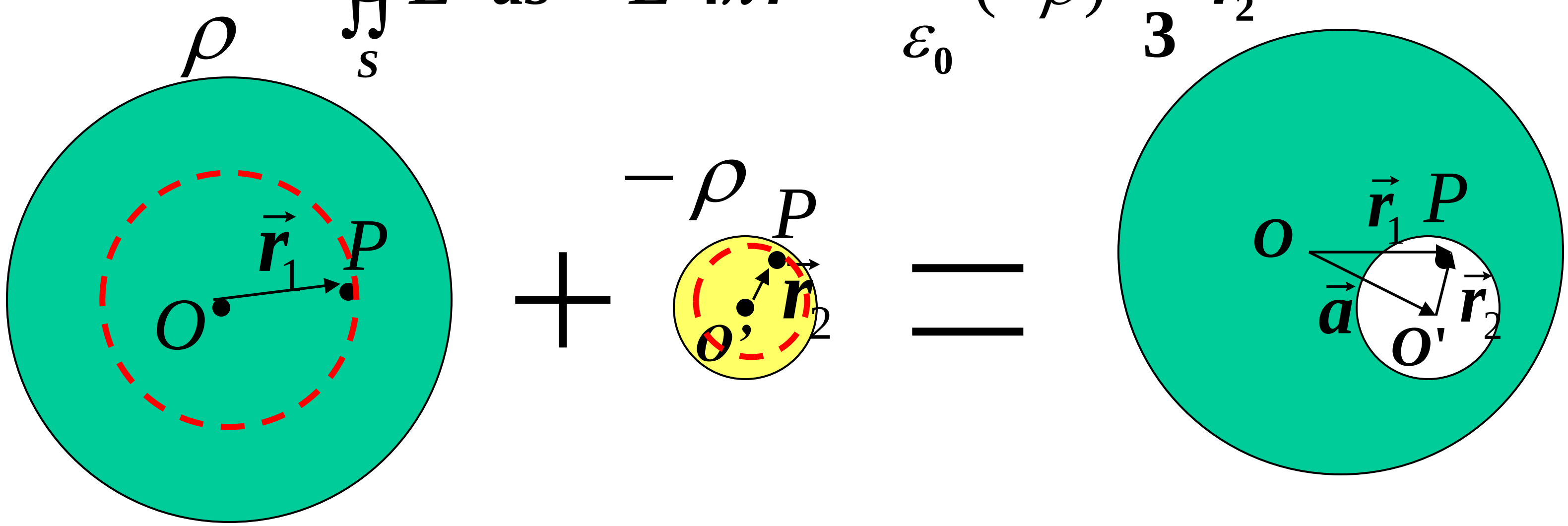
$r>R$时

$$U=\int_r^l E\,\mathrm{d}r=\int_r^l \frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{l}{r}$$

补充知识——用补偿法求解

6－13 一半径为*R*的均匀带电球体，电荷体密度为ρ。今在球内挖去半径为*r*（*r*<*R*）的球体，求球形空腔中任意点的电场强度。

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}(-\rho)\frac{4\pi}{3}r_2^3$$

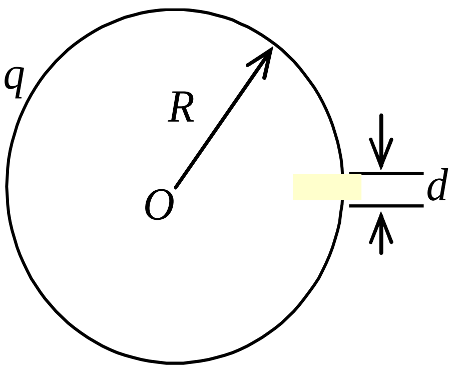


$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3}r_1^3$$

21、一半径为***R***的带有一缺口的细圆环，缺口长度为***d*** **(d<<R)**环上均匀带有正电，电荷为***q***，如图所示．则圆心***O***处的场强大小***E***

＝$\dfrac{qd}{4\pi\varepsilon_0 R^2(2\pi R-d)}\approx\dfrac{qd}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3}$，

场强方向为＿＿从***O***点指向缺口中心点＿＿．



8、静电场中某点电势的数值等于

(A)试验电荷q_0置于该点时具有的电势能.

(B)单位试验电荷置于该点时具有的电势能.

(C)单位正电荷置于该点时具有的电势能.

(D)把单位正电荷从该点移到电势零点外力所作的功.

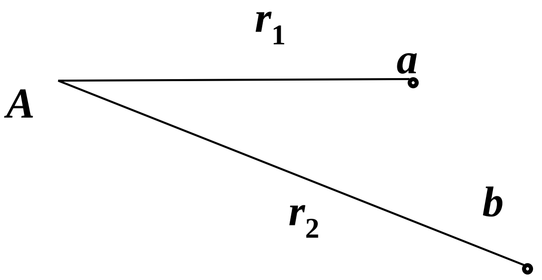
11、在电荷为$-Q$的点电荷A的静电场中，将另一电荷为q的点电荷B从a点移到b点．a、b两点距离点电荷A的距离分别为r_1和r_2，如图所示．则移动过程中电场力做的功为

(A) $\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$．

(B) $\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$．

(C) $\dfrac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$．

(D) $\dfrac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0(r_2-r_1)}$．



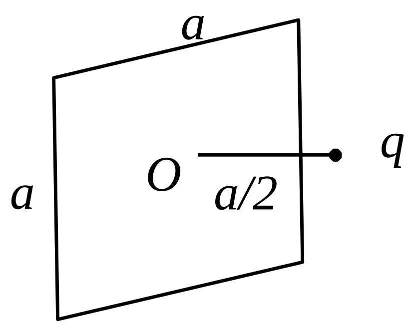
5、有一边长为***a***的正方形平面，在其中垂线上距中心***O***点***a*/2**处，有一电荷为***q***的正点电荷，如图所示，则通过该平面的电场强度通量为

(A) $\dfrac{q}{3\varepsilon_0}$.

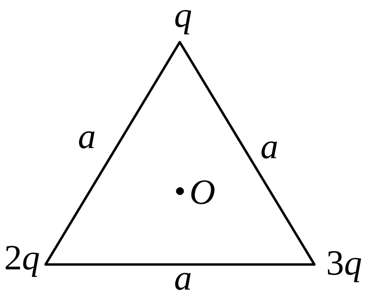
(B) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$.

(C) $\dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0}$.

(D) $\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$.



9、如图所示，边长为***a***的等边三角形的三个顶点上，分别放置着三个正的点电荷***q***、**2*q***、**3*q***．若将另一正点电荷***Q***从无穷远处移到三角形的中心***O***处，外力所作的功为：

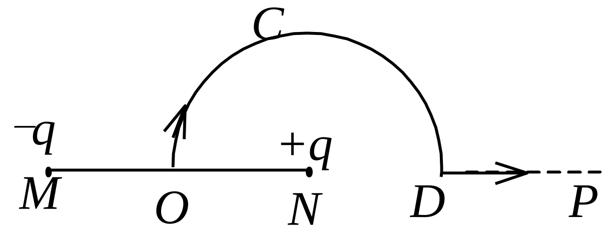


(A) $\dfrac{\sqrt{3}qQ}{2\pi\varepsilon_0 a}$ ． **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}qQ}{\pi\varepsilon_0 a}$ ． **(C)** $\dfrac{3\sqrt{3}qQ}{2\pi\varepsilon_0 a}$ ． **(D)** $\dfrac{2\sqrt{3}qQ}{\pi\varepsilon_0 a}$ ．

$$W_{OP}=Q\int_{\infty}^{O}\vec{E}\cdot d\vec{l}=Q(U_{\infty}-U_{O})$$

$$U_O=U_{2q}+U_q+U_{3q}$$

10、如图所示，直线MN长为$2l$，弧OCD是以N点为中心，l为半径的半圆弧，N点有正电荷$+q$，M点有负电荷$-q$．今将一试验电荷$+q_0$从O点出发沿路径$OCDP$移到无穷远处，设无穷远处电势为零，则电场力作功



(A) $A<0$，且为有限常量.

(B) $A>0$，且为有限常量.

(C) $A=\infty$.

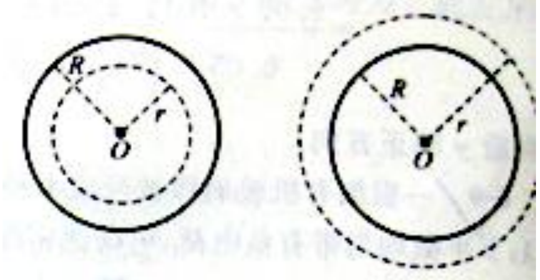
(D) $A=0$.

$$W_{OP}=q_0\int_O^P \vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0(U_O-U_P) \qquad U_O=U_{-q}+U_{+q}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 l/2}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l/2}=0$$

6-11 (1)一半径为 R 的带电球体，其上电荷分布的体密度 ρ 为一常数，试求此带电球体内、外的场强分布；(2)若(1)中带电球体上电荷分布的体密度为 $\rho=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$，其中 ρ_0 为一常数，r 为球上任一点到球心的距离，试求此带电球体内、外的场强分布.

解 (1) 当 $r<R$ 时，建立如题 6-11 图(a)所示的高斯面，根据高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\epsilon_0}$$



(a) (b)

式中 $q=\iiint_V \rho dV=\rho\iiint_V dV=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$，所以

$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\epsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ $\therefore E=\frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

当 $r>R$ 时，建立如题 6-11 图(b)所示的高斯面，根据高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

式中 $q=\iiint_V \rho dV=\rho\iiint_V dV=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$，所以

$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\epsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$

$$E=\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

(2) 当 $r<R$ 时，建立如题 6-11 图(a)所示的高斯面，根据高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

球面

式中 $q=\iiint_V \rho dV=\int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)4\pi r^2 dr=\frac{\rho_0\pi r^3}{3\epsilon_0}\left(4-\frac{3r}{R}\right)$，所以

$$E=\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)$$

当 $r>R$ 时，建立如题 6-11 图(b)所示的高斯面，根据高斯定理

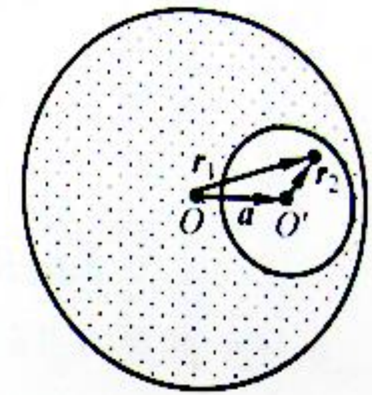
$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

式中 $q=\iiint_V \rho dV=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)4\pi r^2 dr=\frac{\rho_0\pi R^3}{3\epsilon_0}$，所以

$$E=\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}$$

6-13 如题 6-13 图所示，一半径为 R 的均匀带电球体，电荷体密度为 ρ. 今在球内挖去一半径为 $r(r<R)$ 的球体，如果带电球体球心 O 指向球形空腔球心 O' 的矢量用 $\boldsymbol{a}$ 来表示，试证明球形空腔中任意点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$



题 6-13 图

解 利用补偿法求解. 球形空腔中任意点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可看作半径为 R、体密度为 ρ 的均匀带电球体和半径为 r、体密度为 $-\rho$ 的均匀带电球体所分别产生的场强 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 的矢量和.

看6-11 $$\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho\boldsymbol{r}_1}{3\varepsilon_0},\quad \boldsymbol{E}_2=-\frac{\rho\boldsymbol{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

所以

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{\rho\boldsymbol{r}_1}{3\varepsilon_0}-\frac{\rho\boldsymbol{r}_2}{3\varepsilon_0}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$$

而 $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{a}$，上式可改写为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$

6-15 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 $r(r<R)$ 处的电势为

$$V=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

解 利用高斯定理可求得球体内、外的电场强度大小分别为

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & (r<R)\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & (r>R)\end{cases}$$

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

选取无穷远处为电势零点，球内任一点的电势为

$$V=\int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_R^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_r^R\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}dr+\int_R^\infty\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\Big|_r^R+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

第七章　稳恒磁场　复习

一、磁感应强度的定义

磁感应强度$\vec{B}$的大小： $B=\dfrac{F_{\max}}{qv}$ $E=\dfrac{F}{q}$

方向为该点小磁针N极的指向.

二、毕奥–萨伐尔定律

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\qquad dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

求解磁感应强度的两种方法:

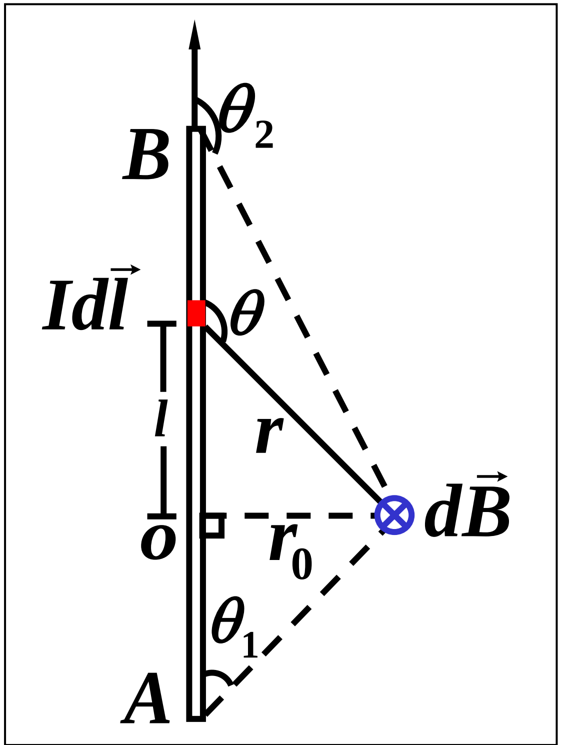
（一）利用毕奥－萨伐尔定理

①取电流元I**d*l***

②写出 $dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2}$

③分析几何关系，转化成一个未知量的关系

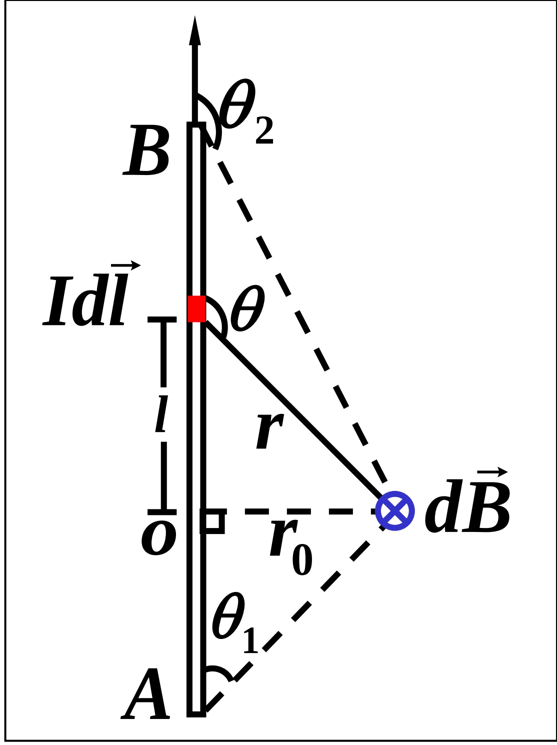
④积分



应用特例:

1、载流长直导线　　无限长

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\qquad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$



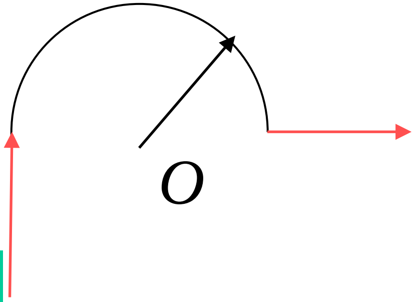
2、载流圆环 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ （圆心处）

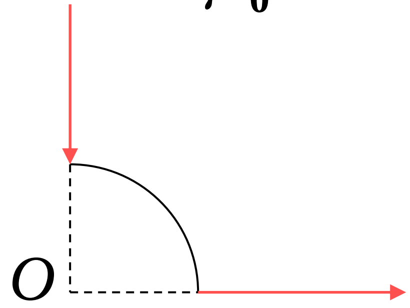
载流半圆环 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4R}$

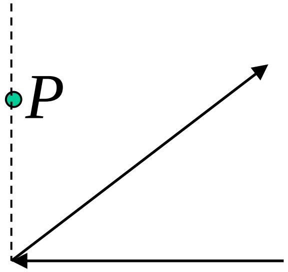
载流圆弧圆心处 $B=\dfrac{\mu_0 I\Phi}{4\pi R}$

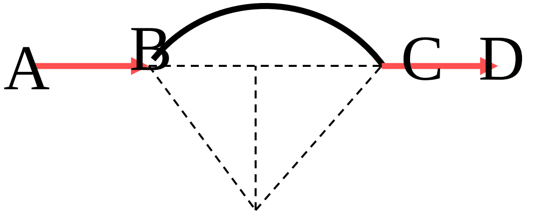
3.通电螺旋管 $B=n\mu_0 I$

典型题7-7,8,9









简单

三、磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

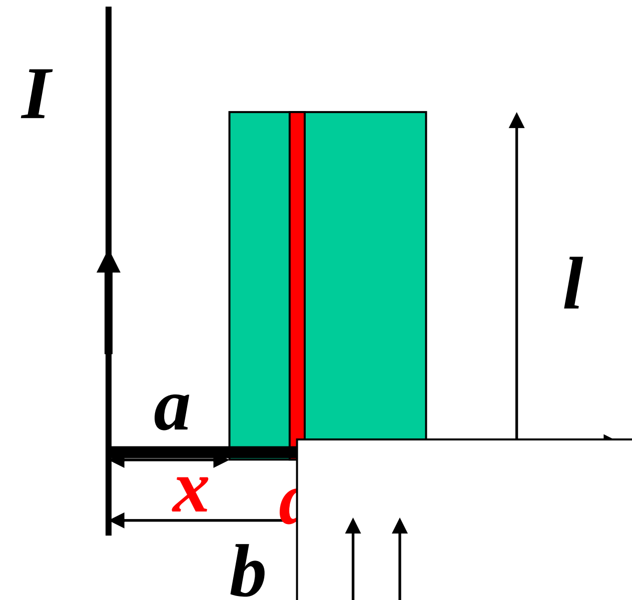
要会计算！ 例

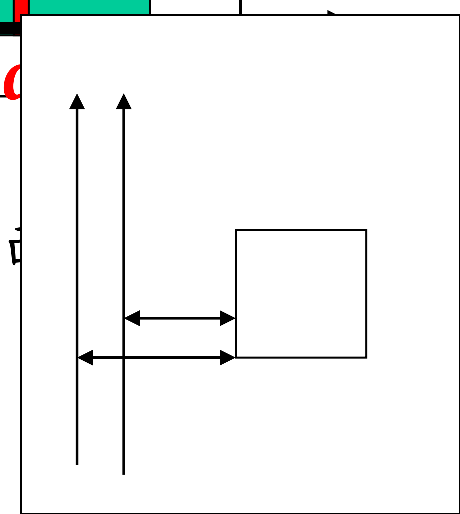
磁通量 $\phi_m = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$

四、安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

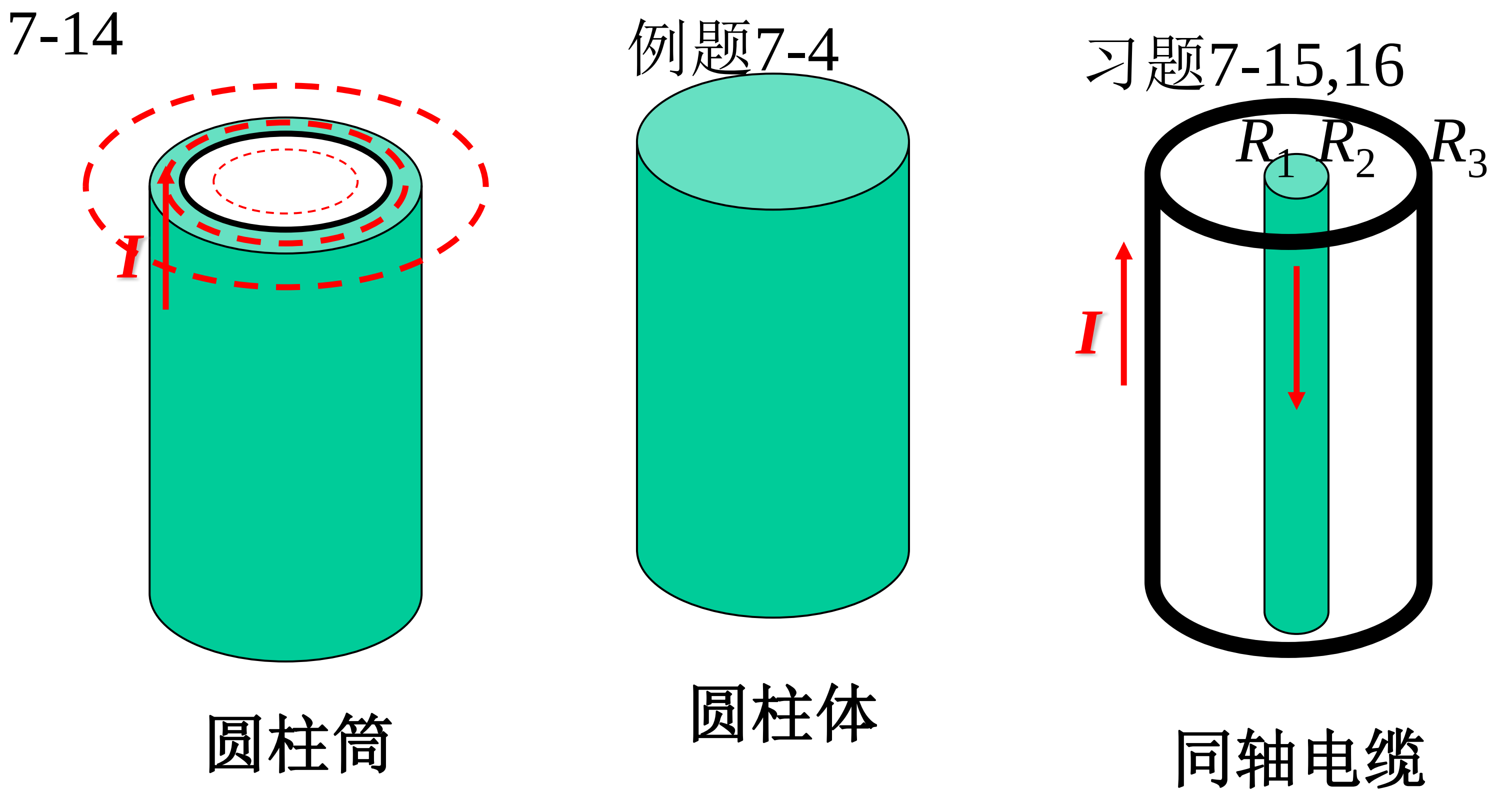
- 洛仑兹力 $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$
- 安培力 $d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$





求穿过矩形

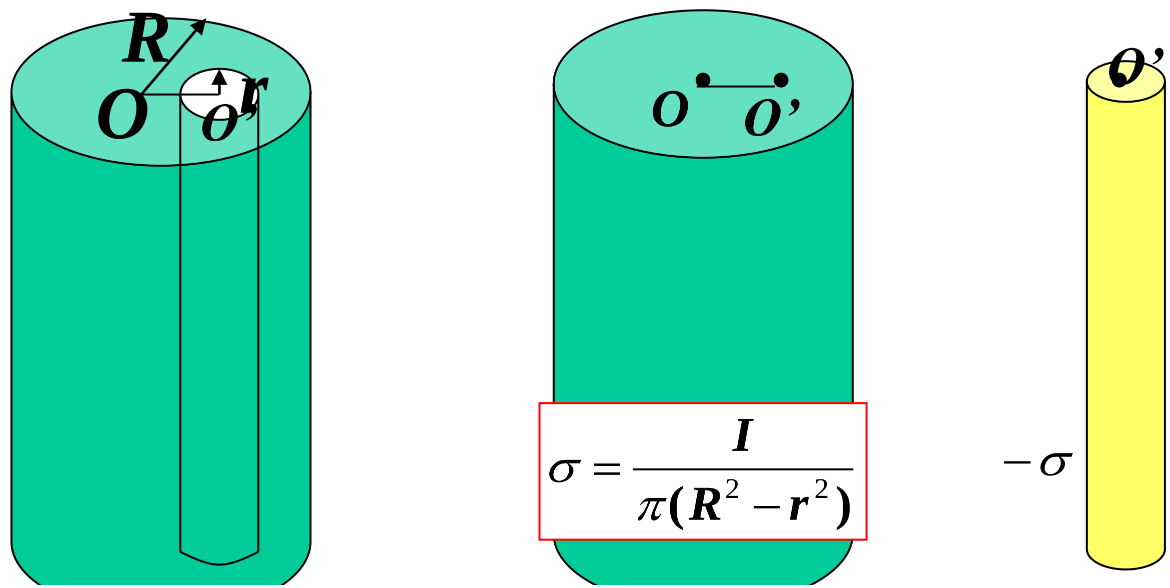
用安培定理求内外磁感应强度B的分布



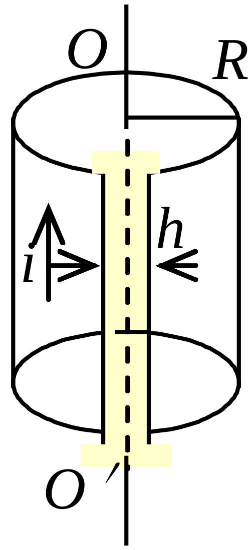
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

（三）补偿法

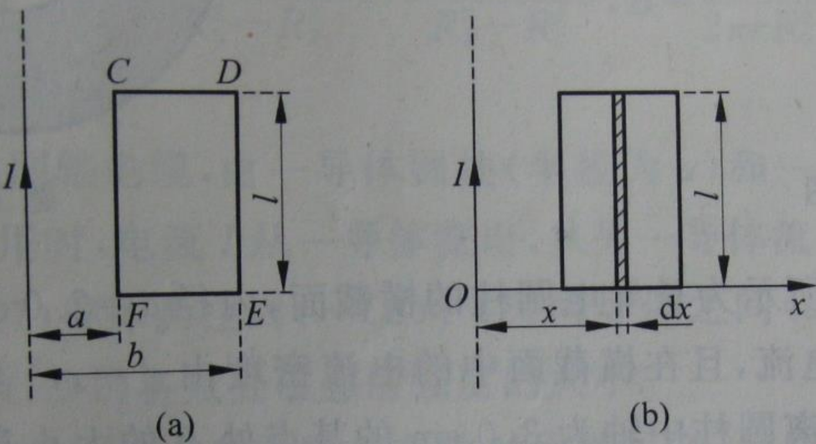
O'点的磁感应强度为多少？



26、将半径为R的无限长导体薄壁管(厚度忽略)沿轴向割去一宽度为h ($h \ll R$)的无限长狭缝后，再沿轴向流有在管壁上均匀分布的电流，其面电流密度(垂直于电流的单位长度截线上的电流)为i(如上图)，则管轴线磁感强度的大小是$\underline{\dfrac{\mu_0 ih}{2\pi R}}$.



7-12 如题 7-12 图(a)所示，载流长直导线中的电流为 I. 求通过矩形面积 $CDEF$ 的磁通量.



题 7-12 图

解 在矩形平面上取一矩形面元 $dS=l\,dx$(题 7-12 图(b))，载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

B

$\phi_M=\iint B\cdot ds$

$$d\phi_m=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dS=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\,dx$$

通过矩形面积的总磁通量为

$$\phi_m=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\,dx=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

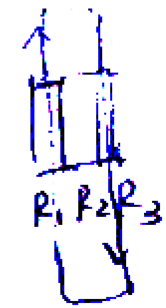
7-15 一根很长的电缆由半径为 R_1 的导体圆柱，以及内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同轴导体圆筒构成. 电流 I 从一导体流出，又从另一导体流回，电流都沿轴线方向流动，并均匀分布在其横截面上. 设 r 为到轴线的垂直距离，试求磁感应强度随 r 的变化.

解 由电流分布具有轴对称性可知，相应的磁场分布也具有轴对称性. 根据安培环路定理有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B\oint_L \mathrm{d}l = B2\pi r = \mu_0 I'$$

可得

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$



其中 I' 是通过圆周 L 内部的电流.

当 $r<R_1$ 时，$I'=\dfrac{Ir^2}{R_1^2}$，$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{R_1^2}$

$B\cdot dl=\mu_0 I$ $\quad B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

当 $R_1<r<R_2$ 时，$I'=I$，$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

当 $R_2<r<R_3$ 时，$I'=I-\dfrac{I(r^2-R_2^2)}{R_3^2-R_2^2}=\dfrac{I(R_3^2-r^2)}{R_3^2-R_2^2}$，$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}$

当 $r>R_3$ 时，$I'=0$，$B=0$

第八章　电磁感应 复习

一、法拉第电磁感应定律: $\boxed{\varepsilon = -\dfrac{d\phi_m}{dt}}$ 二、楞次定律

1、动生电动势:

$$\boxed{\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}$$

大小

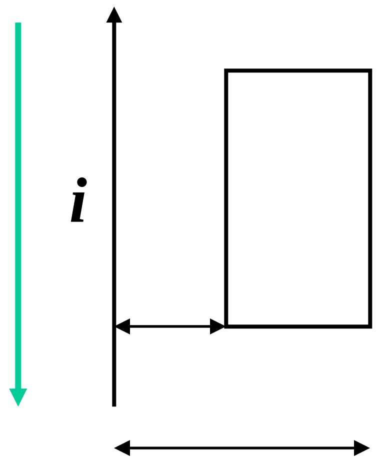
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b vB\sin\alpha\cos\beta dl.$$

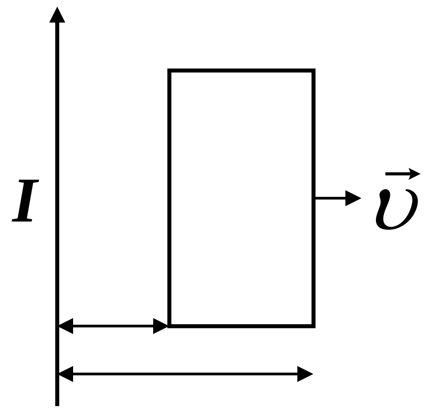
2、感生电动势:

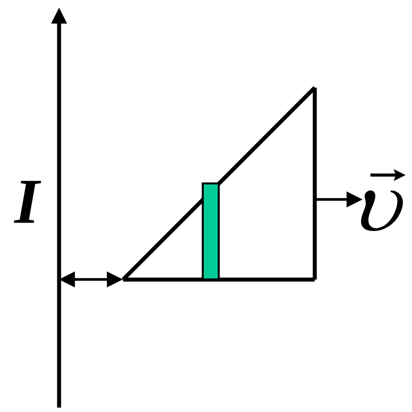
$$\boxed{\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

理解动生电动势和感生电动势的概念!
会计算感应电动势，判定方向!

8-6 $i = I_0 \sin \omega t$





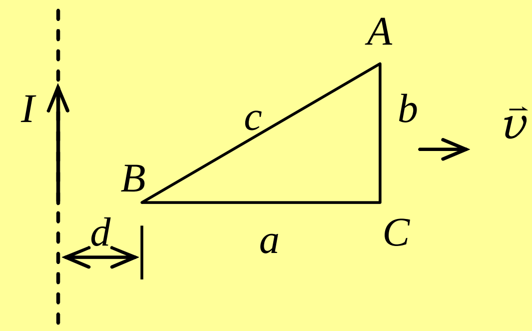


$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

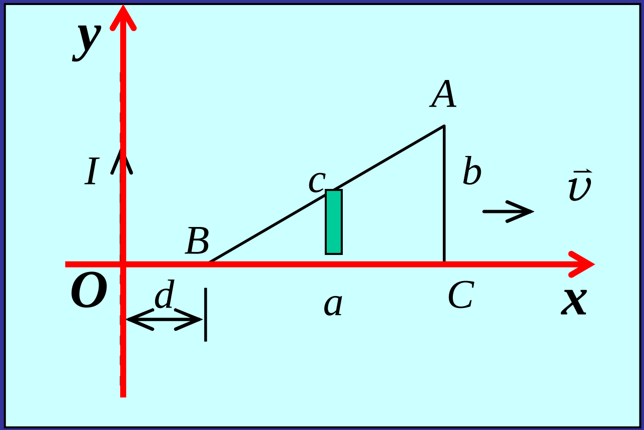
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

$$\phi_m = \phi_{m1} + \phi_{m2}$$

49、无限长直导线，通以常定电流I．有一与之共面的直角三角形线圈ABC．已知AC边长为b，且与长直导线平行，BC边长为a．若线圈以垂直于导线方向的速度$\vec{v}$向右平移，当B点与长直导线的距离为d时，求线圈ABC内的感应电动势的大小和感应电动势的方向.



解：建立坐标系，长直导线为y轴，BC边为x轴，原点在长直导线上。



则斜边的方程为

$$y = (bx/a) - br/a$$

式中r是t 时刻B点与长直导线的距离。三角形中磁通量

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_r^{a+r}\frac{y}{x}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_r^{a+r}\left(\frac{b}{a}-\frac{br}{ax}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(b-\frac{br}{a}\ln\frac{a+r}{r}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left(\ln\frac{a+r}{r}-\frac{a}{a+r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

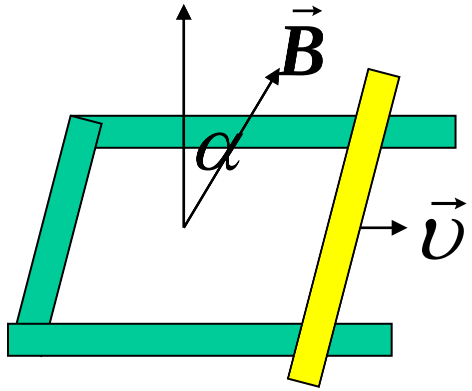
当$r=d$ 时，

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi a}\left(\ln\frac{a+d}{d}-\frac{a}{a+d}\right)\upsilon$$

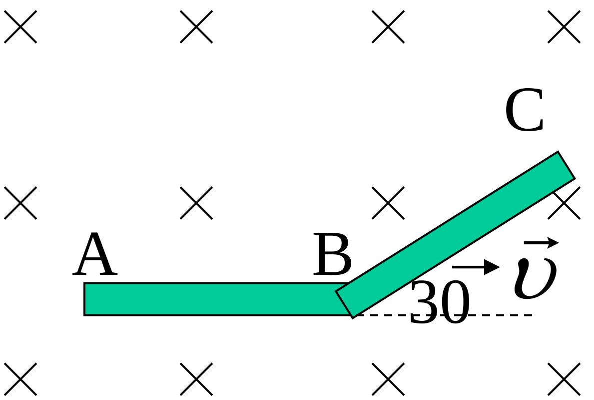
方向：$ACBA$(即顺时针)

2 动生电动势: $\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{平移} \\ \boxed{转动} \end{array} \right.$

8-9



8-10



大小

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b vB \sin\alpha \cos\beta dl.$$

3感生电动势: $\boxed{\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$

35、一半径r =10 cm的圆形闭合导线回路置于均匀磁场$\vec{B}$ (B =0.80 T)中，$\vec{B}$与回路平面正交．若圆形回路的半径从t = 0开始以恒定的速率dr /dt =-80 cm/s收缩，则在这t = 0时刻，闭合回路中的感应电动势大小为__**0.40 V**__；如要求感应电动势保持这一数值，则闭合回路面积应以dS /dt =__**0.5 m²/s**__的恒定速率收缩．

$$d\varphi = dB \cdot S = Bd\pi r^2 = 2\pi rBdr$$

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -2\pi rB\frac{dr}{dt} = -2\times 3.14\times 0.1\times 0.8\times(-0.8) = 0.402V$$

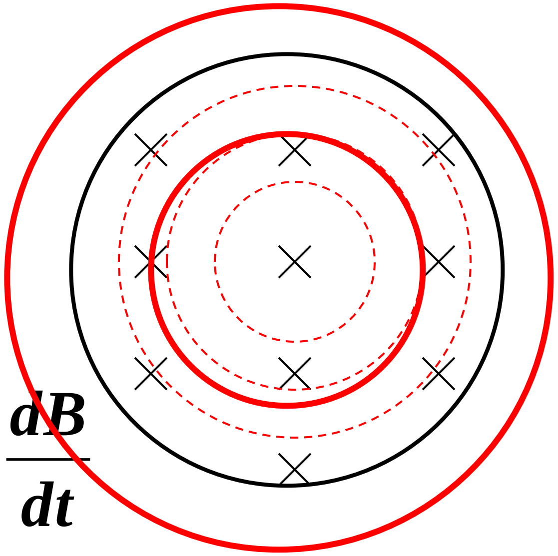
$$d\varphi = dB \cdot S = BdS$$

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -B\frac{dS}{dt}, \frac{dS}{dt} = -0.4/0.8 = -0.5m^2/s$$

8-8　在半径为R=0.5m的圆柱体内有均匀磁场，其方向与圆柱体的轴线平行，且 $dB/dt=1\times10^{-2}T/s$ ，圆柱体外无磁场。试求离开中心o距离为0.1m, 0.25m, 0.5m，1m各点的有旋电场的场强。

$$\varepsilon=\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$E_{感}\cdot 2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi r^2$$



$r<R$　$$E_{感}\cdot 2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi r^2 \Rightarrow E_{感}=-\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}$$

$r>R$　$$E_{感}\cdot 2\pi r=-\frac{dB}{dt}\pi R^2 \Rightarrow E_{感}=-\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

8-14

补充例题 在半径为R的圆柱形体积内充满磁感应强度为 B（t）的均匀磁场, 有一长度为 l 的金属棒放在磁场中, 如图所示, 设$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$为已知，求棒两端的感生电动势。

解法1: 选闭合回路Oab, 方向为逆时针

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

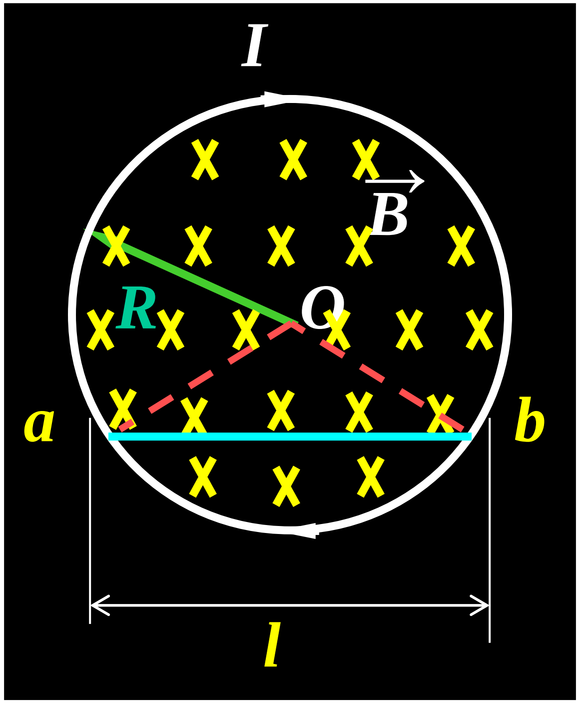
$$\varepsilon_\mathrm{i} = \oint_L \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_O^a \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^O \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= 0 + \int_a^b \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + 0$$

$$= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iint_S \mathrm{d}S$$

$$= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \varepsilon_\mathrm{ab}$$



方向为$a \rightarrow b$

解法2:直接对感应电场积分，方向为$a \rightarrow b$（用电动势定义式）

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_a^b \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b E_{\mathrm{i}} \cos\theta \mathrm{d}l$$

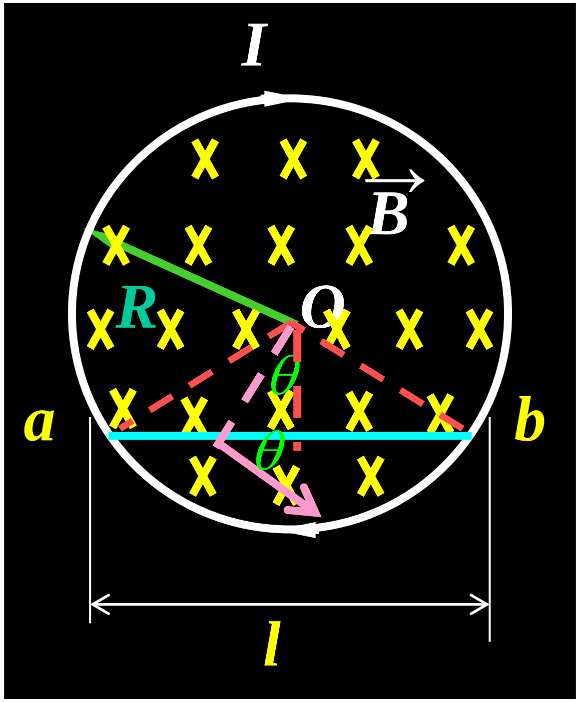
$$\begin{cases} E = -\dfrac{1}{2} r \dfrac{\partial B}{\partial t} & r < R \\ E = -\dfrac{R^2}{2r} \dfrac{\partial B}{\partial t} & r > R \end{cases}$$

$$= \int_a^b \frac{r\cos\theta}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \mathrm{d}l$$

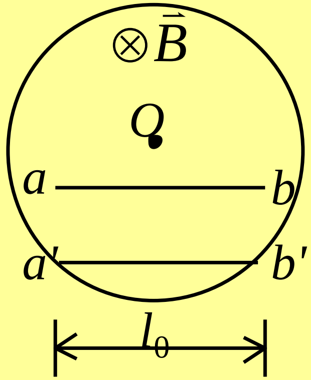
$$= \int_a^b \frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \mathrm{d}l = \frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \int_a^b \mathrm{d}l$$

$$= \frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} l$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$



20、在圆柱形空间内有一磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场，如图所示，$\vec{B}$ 的大小以速率**d*B*/d*t***变化．有一长度为l_0的金属棒先后放在磁场的两个不同位置**1(*ab*)**和**2(*a*′ *b*′)**，则金属棒在这两个位置时棒内的感应电动势的大小关系为

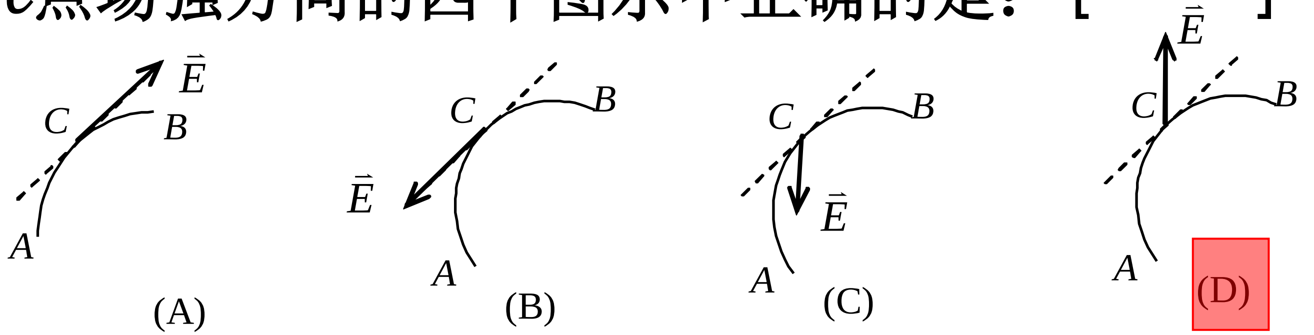


(A) $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \neq 0$.　　**(B)** $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

(C) $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.　　**(D)** $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$.

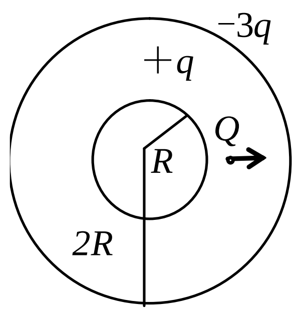
$$\varepsilon_{\mathrm{ab}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \mathrm{t}} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

4．一个带负电荷的质点，在电场力作用下从A点经C点运动到B点，其运动轨迹如图所示．已知质点运动的速率是递减的，下面关于C点场强方向的四个图示中正确的是：[　　]

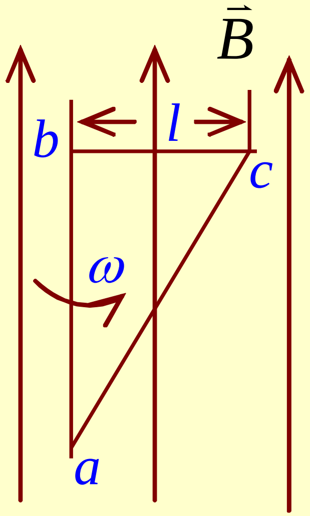


5. 如图所示，在真空中半径分别为R和$2R$的两个同心球面，其上分别均匀地带有电荷$+q$和$-3q$．今将一电荷为$+Q$的带电粒子从内球面处由静止释放，则该粒子到达外球面时的动能为：

(A) $\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$ ．　**(B)** $\dfrac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 R}$　**(C)** $\dfrac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 R}$　**(D)** $\dfrac{3Qq}{8\pi\varepsilon_0 R}$



如图所示，直角三角形金属框架***abc***放在均匀磁场中，磁场平行$\vec{B}$于***ab***边，***bc***的长度为***l***．当金属框架绕***ab***边以匀角速度ω转动时，***abc***回路中的感应电动势ε和***a***、***c***两点间的电势差$U_a - U_c$为



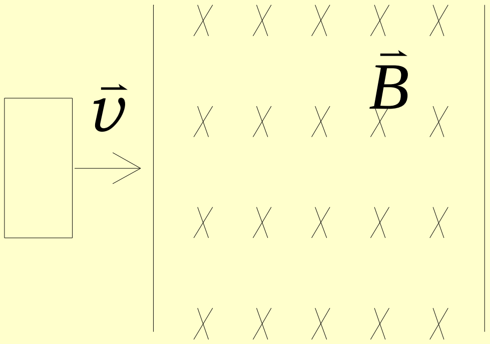
(A) ε =0， $U_a - U_c = \frac{1}{2}B\omega l^2$.

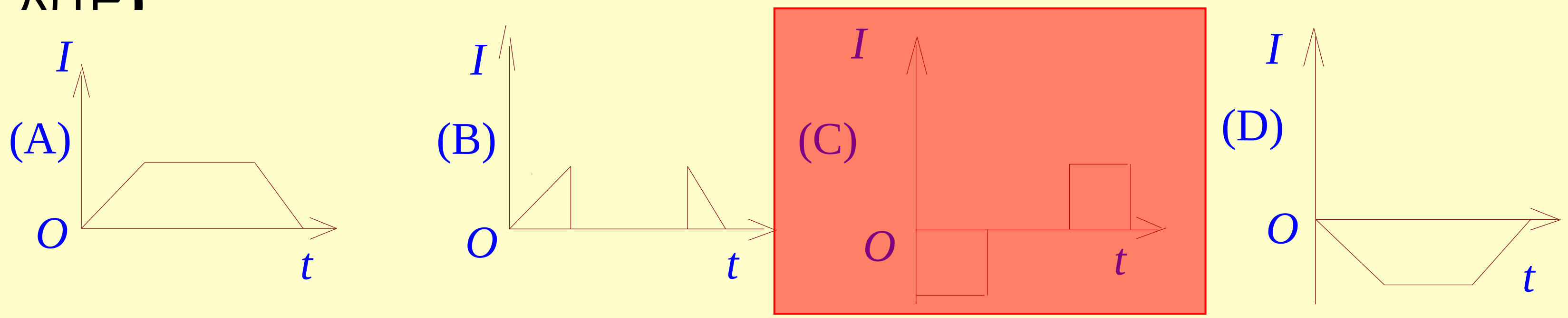
(B) ε =0， $U_a - U_c = -\frac{1}{2}B\omega l^2$.

(C) ε = $B\omega l^2$， $U_a - U_c = \frac{1}{2}B\omega l^2$

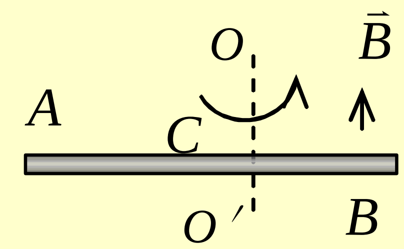
(D) ε = $B\omega l^2$， $U_a - U_c = -\frac{1}{2}B\omega l^2$.

13、如图所示，一矩形金属线框，以速度　从无场空间进入一均匀磁场中，然后又从磁场中出来，到无场空间中．不计线圈的自感，下面哪一条图线正确地表示了线圈中的感应电流对时间的函数关系？(从线圈刚进入磁场时刻开始计时，***I***以顺时针方向为正)





16、如图所示，导体棒AB在均匀磁场B中绕通过C点的垂直于棒长且沿磁场方向的轴 OO′ 转动（角速度ω与$\vec{B}$同方向），BC的长度为棒长的1/3，则



(A) A点比B点电势高.

(B) A点与B点电势相等.

(C) A点比B点电势低.

(D) 有稳恒电流从A点流向B点.

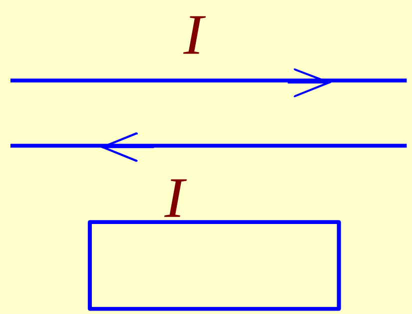
14、两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流I，并各以dI /dt的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内(如图)，则：

(A) 线圈中无感应电流.

(B) 线圈中感应电流为顺时针方向.

(C) 线圈中感应电流为逆时针方向.

(D) 线圈中感应电流方向不确定.



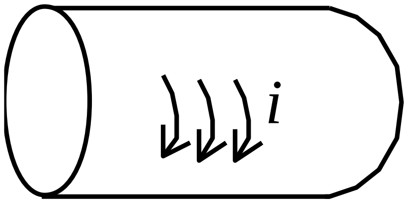
13、真空中一半径为*R*的均匀带电球面，总电荷为*Q*．今在球面上挖去很小一块面积△*S* (连同其上电荷)，若电荷分布不改变，则挖去小块后球心处电势(设无穷远处电势为零)为

______$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\dfrac{\Delta S}{4\pi R^2}\right)$

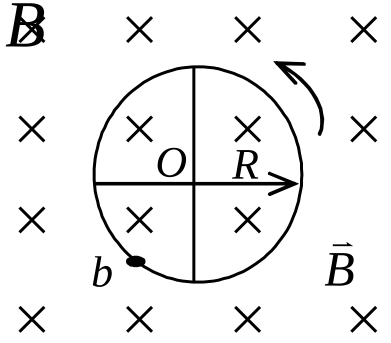
14.一半径为*R*的均匀带电球面，带有电荷*Q*．若规定该球面上电势为零，则球面外距球心*r*处的*P*点的电势U_P＝__$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)$

15、图中所示的一无限长直圆筒，沿圆周方向上的面电流密度(单位垂直长度上流过的电流)为*i*，则圆筒内部的磁感强度的大小为*B* =____u0i__，方向

___沿轴线方向朝右



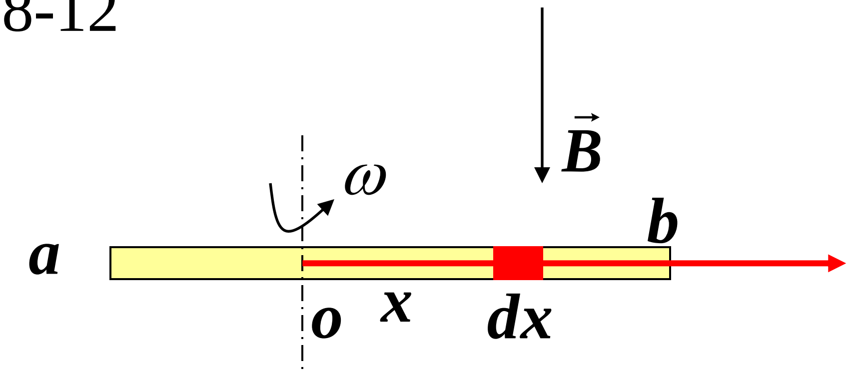
37、四根辐条的金属轮子在均匀磁场 $\vec{B}$ 中转动，转轴与 $\vec{B}$ 平行，轮子和辐条都是导体，辐条长为***R***，轮子转速为***n***，则轮子中心***O***与轮边缘***b***之间的感应电动势为__**πBnR^2**__，电势最高点是在__***O***__处.



$$\varpi = 2\pi n, v = r\varpi = 2\pi nr$$

$$\varepsilon = \int_0^R vBdl = \pi R^2 nB$$

8-12



$$\boxed{\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

Ab两端的电势差

$$U_{ab} = U_a - U_b$$
$$= \varepsilon_{oa} - \varepsilon_{ob}$$
$$= -\frac{1}{2}\omega B l^2 (1-\frac{2}{k})$$

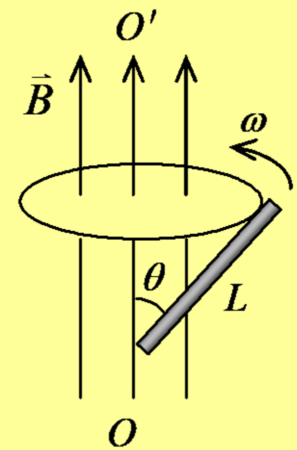
Ob棒产生的动生电动势

$$\varepsilon_{ob} = \int_o^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_o^{l-\frac{l}{k}} x\omega B \sin\frac{\pi}{2}\cos\pi dx = -\frac{1}{2}\omega B l^2 (1-\frac{1}{k})^2$$

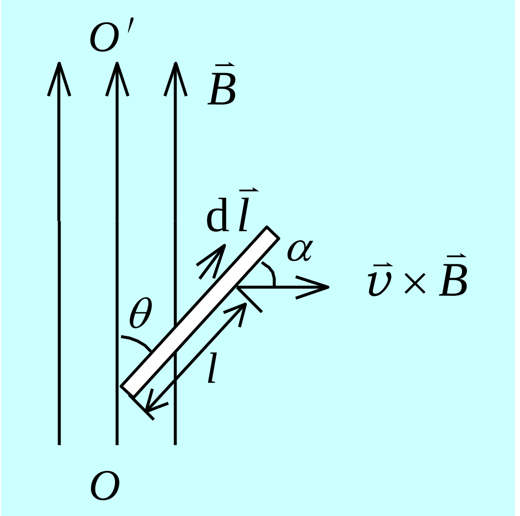
Oa棒产生的动生电动势

$$\varepsilon_{oa} = \int_o^a (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_o^{-\frac{l}{k}} x\omega B \sin\frac{\pi}{2}\cos\pi dx = -\frac{1}{2}\omega B l^2$$

50、 求长度为L的金属杆在均匀磁场$\vec{B}$中绕平行于磁场方向的定轴OO'转动时的动生电动势．已知杆相对于均匀磁场$\vec{B}$的方位角为θ，杆的角速度为ω，转向如图所示．



解：在距O点为l处的$\mathrm{d}l$线元中的动生电动势为



$$d\varepsilon = (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

其中
$$\upsilon = \omega l \sin\theta$$

∴
$$\varepsilon = \int_L (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L \upsilon B \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos\alpha\,\mathrm{d}l$$

$$= \int_\Lambda \omega l B \sin\theta\,\mathrm{d}l\sin\theta = \omega B\sin^2\theta\int_0^L l\,\mathrm{d}l$$

$$= \frac{1}{2}\omega B L^2\sin^2\theta$$

ε的方向沿着杆指向上端。

8-6 一无限长直导线通有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$，它旁边有一与它共面的矩形线圈 $ABCD$，如题 8-6 图所示，长为 l 的 AB 和 CD 两边与直导线平行，它们到直导线的距离分别为 a 和 b. 试求矩形线圈所围面积的磁通量，以及线圈中的感应电动势.

解 建立如题 8-6 图所示的坐标系. 在矩形平面上取一矩形面元 $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}x$，载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}}$$

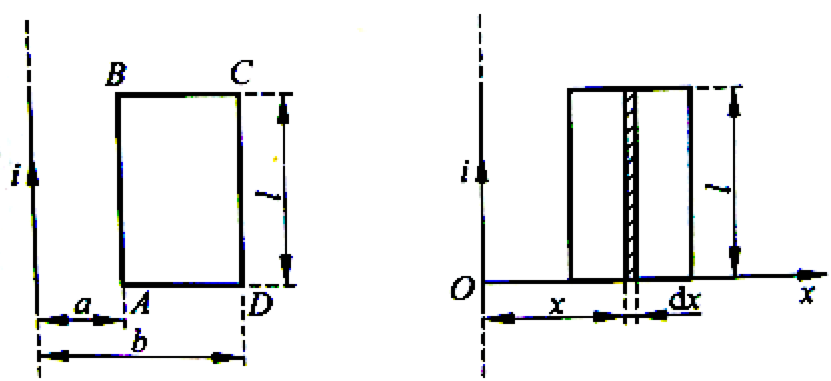
$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m} = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l\,\mathrm{d}x$$

通过矩形面积 $CDEF$ 的总磁通量为

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0 I_0 \sin\omega t \cdot l}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

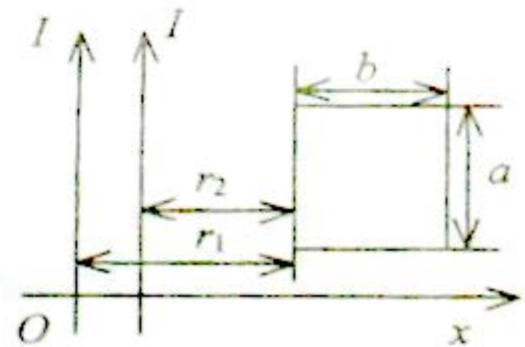
由法拉第电磁感应定律有

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \cos \omega t$$



(a) (b)

如图所示，两条平行长直导线和一个矩形导线框共面．且导线框的一个边与长直导线平行，他到两长直导线的距离分别为 r_1、r_2．已知两导线中电流都为 $I=I_0\sin\omega t$，其中 I_0 和 ω 为常数，t 为时间．导线框长为 a 宽为 b，求导线框中的感应电动势．



解：两个载同向电流的长直导线在如图坐标 x 处所产生的磁场为

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-r_1+r_2}\right)$$

选顺时针方向为线框回路正方向，则

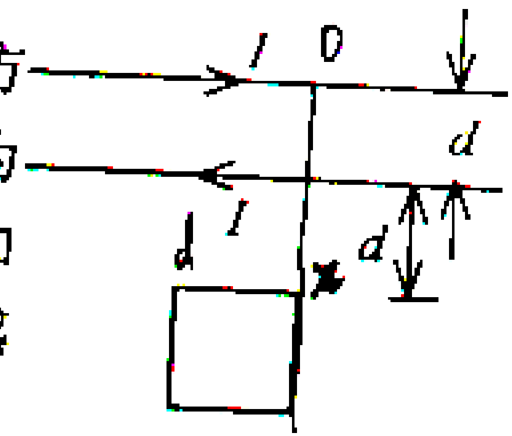
$$\Phi=\int B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{r_1}^{r_1+b}\frac{\mathrm{d}x}{x-r_1+r_2}\right)$$

$$=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{r_1+b}{r_1}\cdot\frac{r_2+b}{r_2}\right)$$

$$\therefore\quad \mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left[\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1r_2}\right]\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\frac{\mu_0 I_0 a\omega}{2\pi}\ln\left[\frac{(r_1+b)(r_2+b)}{r_1r_2}\right]\cos\omega t$$

两根平行无限长直导线相距为 d，载有大小相等方向相反的电流 I，电流变化率 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=\alpha>0$．一个边长为 d 的正方形线圈位于导线平面内与一根导线相距 d，如图所示．求线圈中的感应电动势$\mathcal{E}$，并说明线圈中的感应电流是顺时针还是逆时针方向．



解：(1) 载流为 I 的无限长直导线在与其相距为 r 处产生的磁感强度为：

$$B=\mu_0 I/(2\pi r)$$ 2 分

以顺时针绕向为线圈回路的正方向，与线圈相距较远的导线在线圈中产生的磁通量为：

$$\Phi_1=\int_{2d}^{3d} d\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln\frac{3}{2}$$

与线圈相距较近的导线对线圈的磁通量为：

$$\Phi_2=\int_{d}^{2d} -d\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r=-\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln 2$$

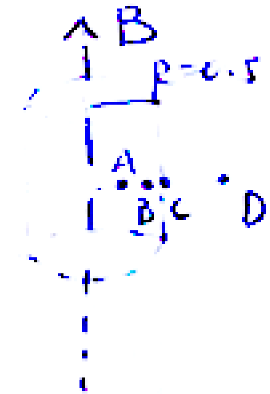
总磁通量 $$\Phi=\Phi_1+\Phi_2=-\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln\frac{4}{3}$$ 4 分

感应电动势为： $$\mathcal{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 d}{2\pi}(\ln\frac{4}{3})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 d}{2\pi}\alpha\ln\frac{4}{3}$$ 2 分

由$\mathcal{E}>0$ 和回路正方向为顺时针，所以$\mathcal{E}$的绕向为顺时针方向，线圈中的感应电流亦是顺时针方向． 2 分

8-13 在半径 $R=0.50\ \mathrm{m}$ 的圆柱体内有均匀磁场，其方向与圆柱体的轴线平行，且 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t=1.0\times10^{-2}\ \mathrm{T\cdot s^{-1}}$，圆柱体外无磁场. 试求离开中心 O 的距离分别为 0.10 m、0.25 m、0.50 m 和 1.0 m 各点的有旋电场的场强.

解 变化的磁场产生的感生电场的电场线是以圆柱轴线为圆心的一系列同心圆. 因此有



$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \oint_L \boldsymbol{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

而 $\oint_L \boldsymbol{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_{感}\,2\pi r$，$-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2$

当 $r<R$ 时，

$$E_{感}\,2\pi r = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2$$

$$E_{感} = -\frac{1}{2}r\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

所以 $r=0.1\ \mathrm{m}$ 时，$E_{感}=5.0\times10^{-4}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$；$r=0.25\mathrm{m}$ 时，$E_{感}=1.3\times10^{-3}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

当 $r>R$ 时，

$$E_{感}\,2\pi r = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

$$E_{感} = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

以 $r=0.50\ \mathrm{m}$ 时，$E_{感}=2.5\times10^{-3}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$；$r=1.0\ \mathrm{m}$ 时，$E_{感}=1.25\times10^{-3}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

第四篇《振动与波》

1. 掌握描述简谐振动和简谐波动各物理量的意义及各量的相互关系。
2. 掌握旋转矢量法，并能用以分析有关问题。
3. 掌握简谐振动的基本特征。能根据给定的初始条件建立一维谐振动的运动方程，并理解其物理意义。
4. 理解两个同方向、同频率谐振动的合成规律，以及合振动振幅极大和极小的条件。
5. 理解机械波产生的条件。掌握根据已知质点的谐振动方程建立平面简谐波的波动方程的方法，以及波动方程的物理意义。理解波形曲线。
6. 理解惠更斯原理和波的叠加原理。掌握波的相干条件。能用相位差或波程差的概念分析合确定相干波叠加后振幅加强和减弱的条件。

《振动》复习

简谐振动

微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ (动力学方程)

表达式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ （运动方程）

振动三要素的物理意义？如何求？

振幅A: $E=\frac{1}{2}kA^2$

圆频率ω: $\begin{cases}\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} & \text{弹簧振子}\\ \omega=\sqrt{\frac{g}{l}} & \text{单摆}\end{cases}$

初相位φ:

$t=0$时刻 $\begin{cases}x_0=A\cos\varphi\\ v_0=-A\omega\sin\varphi\end{cases}$ ⇒ $\begin{cases}A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}\\ tg\varphi=-\frac{v_0}{x_0\omega}\end{cases}$

求振动三要素

（1）解析法

（2）图像法

（3）旋转矢量法

掌握！

同方向同频率的简谐振动的合成规律

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 2k\pi, A = A_1 + A_2 \ \max \\ (2k+1)\pi, A = |A_1 - A_2| \ \min \end{cases} \qquad k = \pm 0, 1, 2, \cdots$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

什么时候振动极大？极大值为多少？
什么时候振动极小？极小值为多少？

（一）波动基本知识

一、机械波产生的条件（波源、弹性介质）

二、波动的物理描述

波长、频率与波速 $\boxed{u = \lambda\nu}$

三、波动方程

原点o处质元的振动方程 $y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$

任意点P点处质元的振动方程——波动方程

$$y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

求解波动方程是重点！

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$$y = A\cos\left[2\pi\left(\nu t \mp \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

波动方程的物理意义：

t_1时刻x_1处质元的振动相位在$t_1+\Delta t$时刻传至$x_1+\Delta x$处，相位的传播速度为u

波的干涉

1. 惠更斯原理

波所到达的每一点都可看作发射次级子波的波源，新的波阵面就是这些次级子波波阵面的包迹.——可解释波的反射、折射和衍射等现象.

2. 波的叠加原理

振动的矢量和 $\left\{\begin{array}{l}\text{相遇前后各自独立;}\\ \text{相遇时相互叠加.}\end{array}\right.$

3. 波的相干条件

频率相同、振动方向相同、具有恒定相位差

波的相干

波源 $\begin{cases} y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

在P点处各自振动方程

$$\begin{cases} y_1 = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_1 - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_2 - \dfrac{2\pi r_2}{\lambda}\right) \end{cases}$$

相干波叠加后 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

$$\Delta\varphi = \underline{\varphi_2 - \varphi_1} - \underline{\frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

初相位差　波程差引起相位差

波程差

$\delta = r_2 - r_1$

会分析什么时候加强？什么时候减弱！

相位表示法:

$$\begin{cases} 当\ \Delta\varphi = \pm 2k\pi \quad k = 0,1,2,3\cdots \\ \qquad A = A_1 + A_2 \qquad (干涉相长) \\ 当\ \Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi \quad k = 0,1,2,3\cdots \\ \qquad A = |A_1 - A_2| \qquad (干涉相消) \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

两波源的初相位相同，即 $\varphi 2 = \varphi 1$

波程差表示法:

$$\begin{cases} \delta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} \quad k = 0,1,2,3\cdots & 干涉相长 \\ \delta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \quad k = 0,1,2,3\cdots & 干涉相消 \end{cases}$$

（三）振动与波动的应用

熟练使用！

1. 简谐振动的旋转矢量表示法 i

2. 根据初始条件建立振动方程；根据振动方程写出各个物理量

3. 已知质点的振动方程求波动方程。

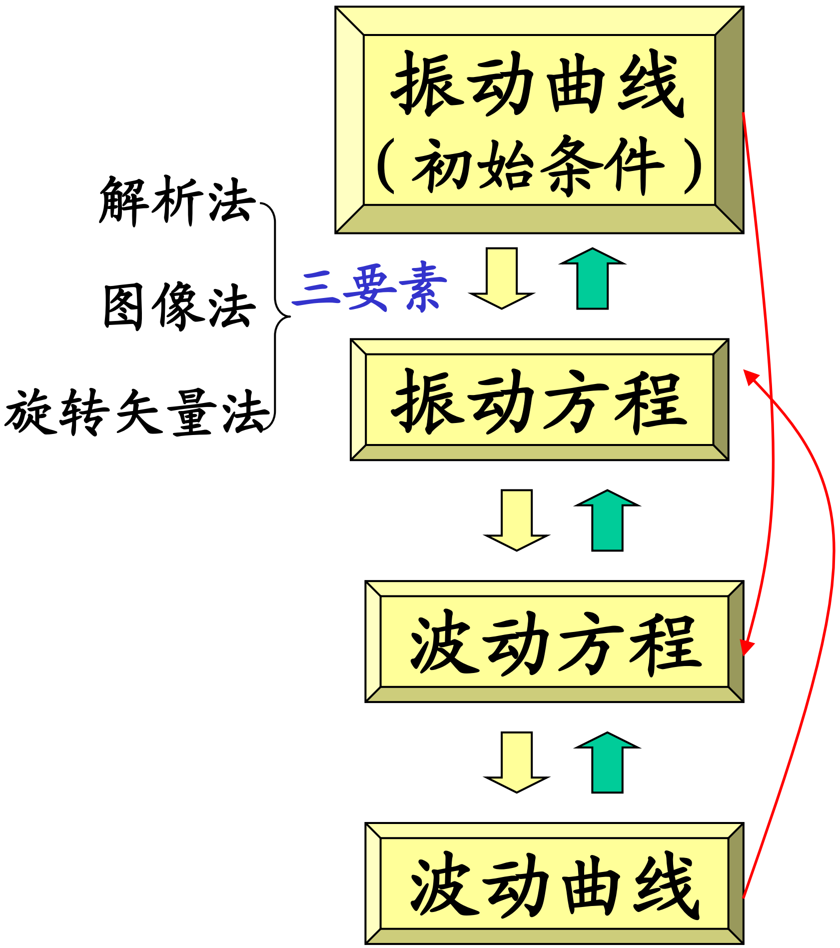
- 已知波源的振动方程，写O点的波动方程 例
- 已知波源的振动方程，写P点为坐标原点的波动方程

1.写出以波源为坐标原点的波动方程； 例
2. 写出P点的振动方程；
3. 用P点的初相位写标准波动方程。

4. 已知波形曲线，求振动方程！ 例

- 已知t=0时的波形曲线
- 已知t=2s时的波形曲线

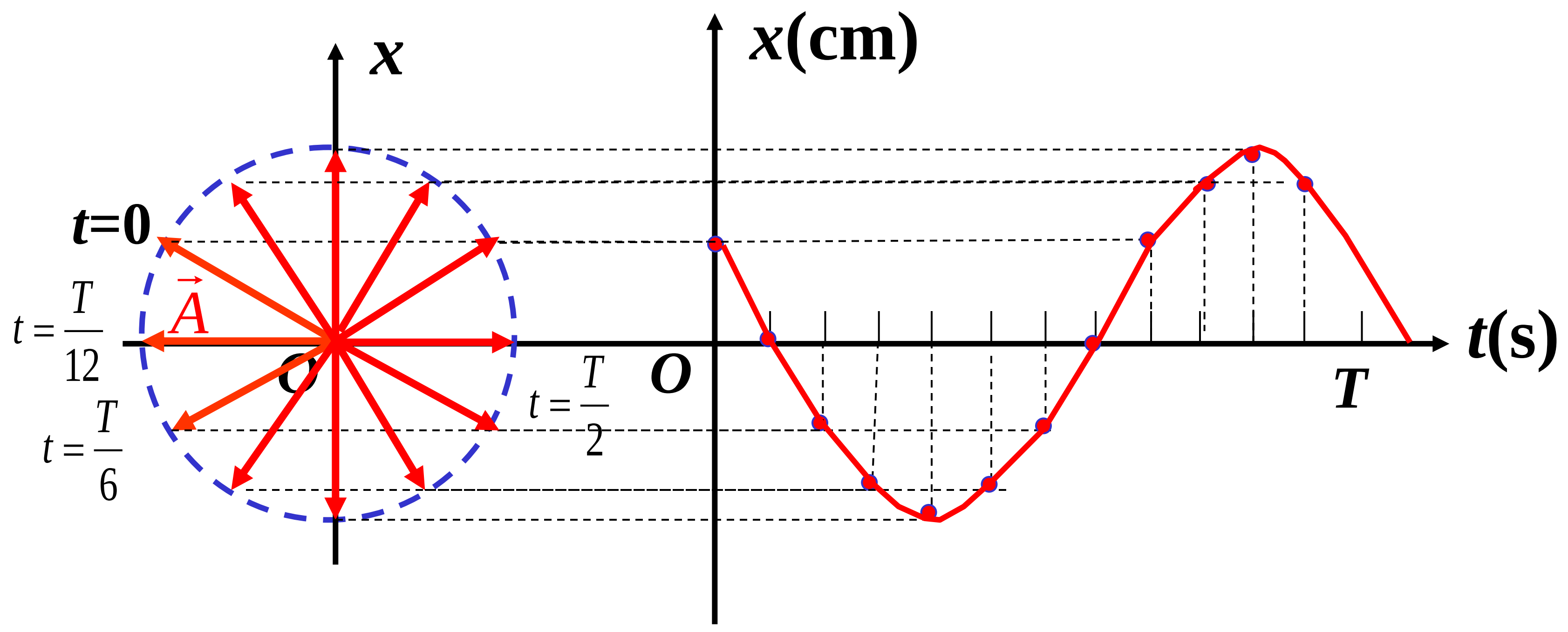
1.写出以2s为初始时刻的振动（波动）方程，时间为t‘
2. 写出用t-2代替t’。



振动曲线
（初始条件）
解析法
图像法
旋转矢量法
三要素
振动方程
波动方程
波动曲线

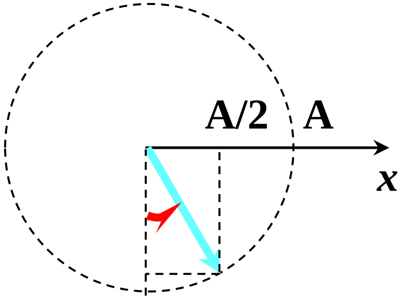
补充知识:

利用旋转矢量法作 *x-t* 图:



5、一质点作简谐振动，周期为T．质点由平衡位置向x轴正方向运动时，由平衡位置到二分之一最大位移这段路程所需要的时间为

(A) $T/4$.　　(B) $T/6$　　(C) $T/8$　　(D) $T/12$



7 一质点作简谐振动，周期为 T. 当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需要的时间为

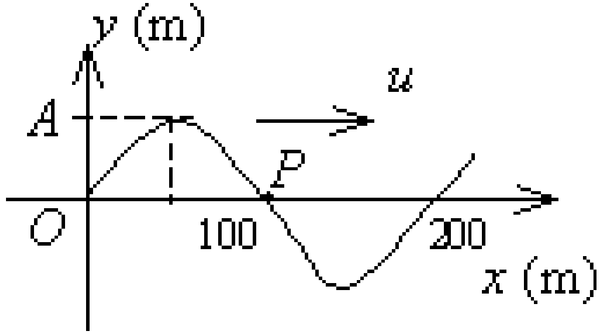
(A) $T/12$. (B) $T/8$. (C) $T/6$. (D) $T/4$. [ ]

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2},\varphi_p=-\frac{\pi}{2},$$

$$x_p=A\cos(2\pi t-\frac{\pi}{2})$$

$$v_p=-A2\pi\sin(2\pi t-\frac{\pi}{2})=-0.2\pi\cos(2\pi t-\pi)$$

8 图示一简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，波速 $u=200$

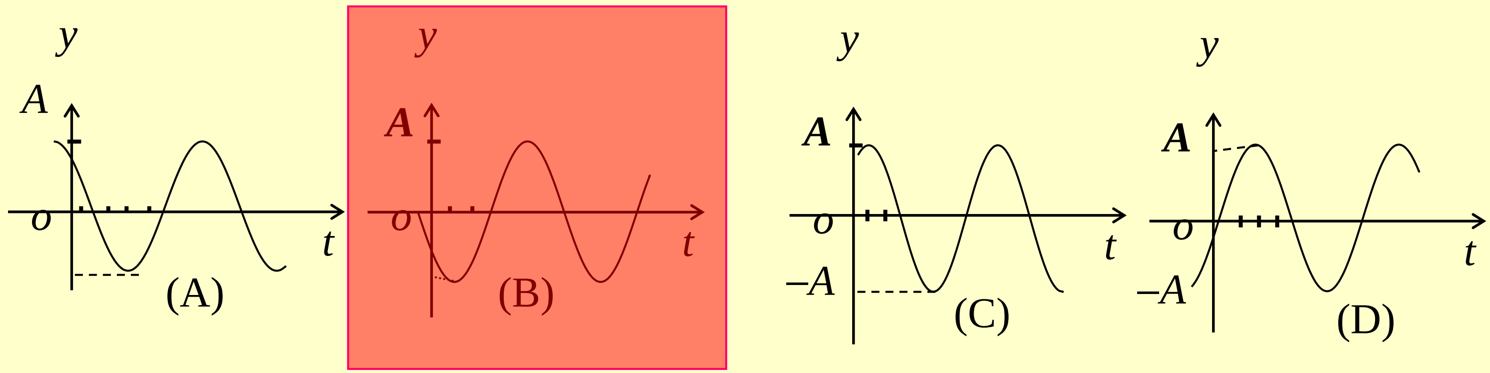


则 P 处质点的振动速度表达式为

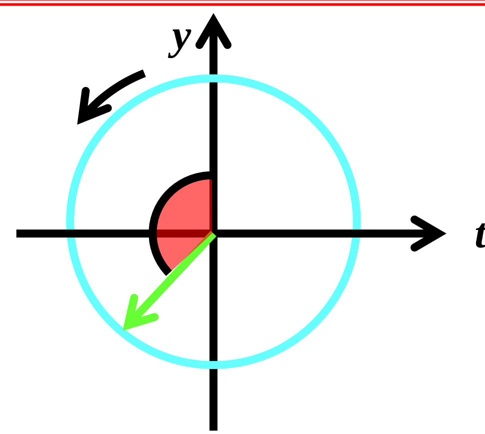
(A) $v=-0.2\pi\cos(2\pi t-\pi)$ (SI). (C) $v=0.2\pi\cos(2\pi t-\pi/2)$ (SI).

(B) $v=-0.2\pi\cos(\pi t-\pi)$ (SI). (D) $v=0.2\pi\cos(\pi t-3\pi/2)$ (SI).

6、已知一质点沿 y 轴作简谐振动．其振动方程为 $y = A\cos(\omega t + 3\pi/4)$．与之对应的振动曲线是

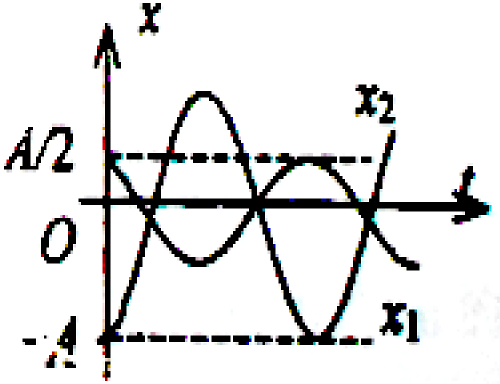


两种方法:
1.初始条件法
2.旋转矢量法



9-14

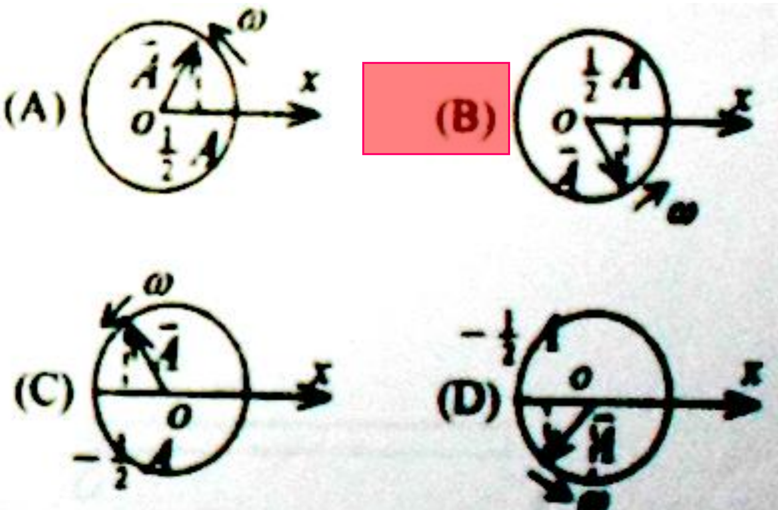
图中所画的是两个简谐振动的振动曲线．若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为



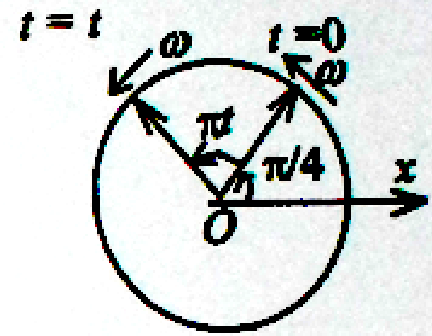
(A) $\frac{3}{2}\pi$．　　(B) π．

(C) $\frac{1}{2}\pi$．　　(D) 0．

一个质点作简谐振动，振幅为 A，在起始时刻质点的位移为 $\frac{1}{2}A$，且向 x 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为



一简谐振动的旋转矢量图如图所示，振幅矢量长 2 cm，则该简谐振动的初相为 $\pi/4$ 。振动方程为 $x = 2\times10^{-2}\cos(\pi t+\pi/4)$ 。

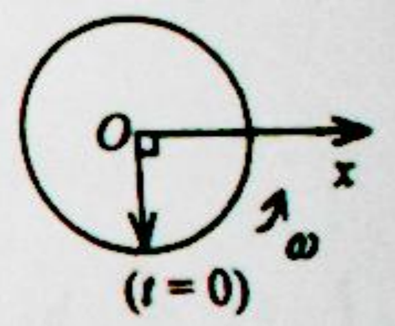


两个同方向同频率的简谐振动

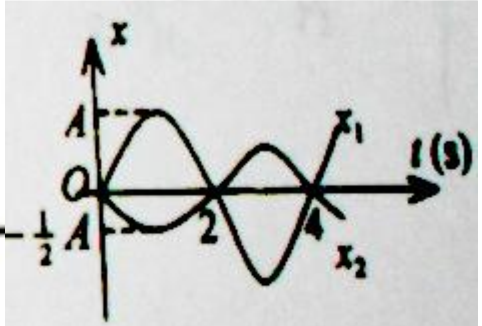
$$x_1 = 3\times10^{-2}\cos(\omega t+\frac{1}{3}\pi), \quad x_2 = 4\times10^{-2}\cos(\omega t-\frac{1}{6}\pi)$$

它们的合振幅是 5×10^{-2} 。

图中用旋转矢量法表示了一个简谐振动．旋转矢量的长度为 0.04 m，旋转角速度 $\omega = 4\pi$ rad/s．此简谐振动以余弦函数表示的振动方程为 $x =$ $0.04\cos(4\pi t - \pi/2)$



如图所示的是两个简谐振动的振动曲线，它们合成的余弦振动的初相为 $-\pi/2$或$3\pi/2$



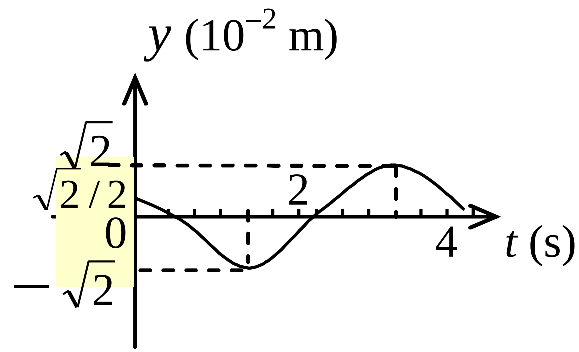
1.已知波源的振动方程，写O点的波动方程

一简谐波沿Ox轴正方向传播，波长$\lambda = 4$ m， 周期$T = 4$ s，已知$x = 0$处质点的振动曲线如图所示.

(1) 写出$x = 0$处质点的振动方程；

(2) 写出波的表达式；

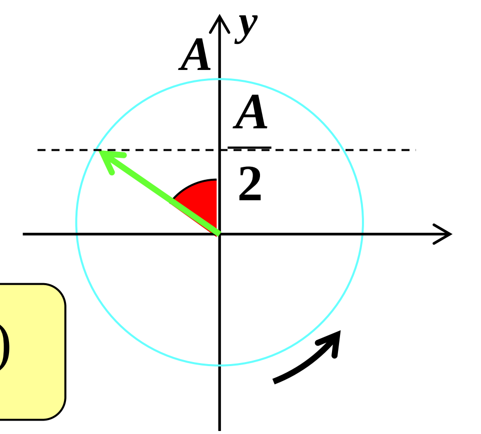
(3) 画出$t = 1$ s时刻的波形曲线.



$$A = \sqrt{2} \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(\mathrm{s}^{-1})$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$



$x = 0$处质点的振动方程为

$$\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$y_0 = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)(\mathrm{SI})$$

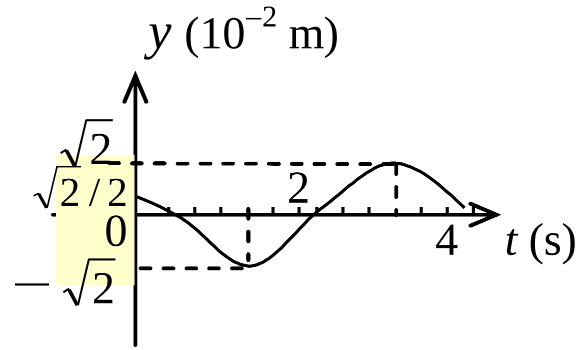
1.已知波源的振动方程，写O点的波动方程

一简谐波沿Ox轴正方向传播，波长$\lambda = 4$ m， 周期$T = 4$ s，已知$x = 0$处质点的振动曲线如图所示.

(1) 写出$x = 0$处质点的振动方程；

(2) 写出波的表达式；

(3) 画出$t = 1$ s时刻的波形曲线.



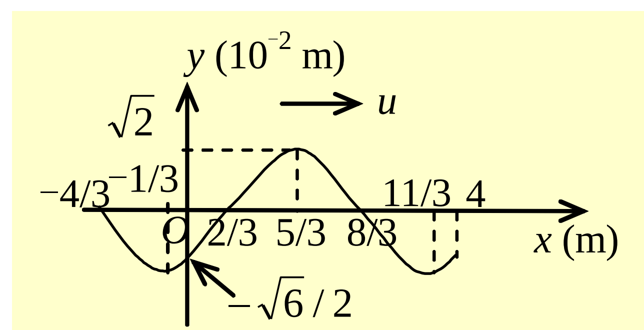
$$y = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{3}\pi\right] \text{(SI)}$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

(3) $t = 1$s 时的波形表达式为

$$y = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi x - \frac{5}{6}\pi\right) \text{(SI)}$$

$\therefore t = 1$ s时刻的波形曲线为



已知波源的振动方程，写P点为坐标原点的波动方程

P230例题10-2. 如图所示，一平面简谐波以400 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$的波速在均匀媒质中沿x轴正向传播. 已知波源在o点，波源的振动周期为0.01s、振幅为0.01m. 设以波源振动经过平衡位置且向y轴正向运动作为计时起点，求：（1）B和A两点之间的振动相位差；（2）以B为坐标原点写出波动方程.

1.写出以波源为坐标原点的波动方程;
2. 写出P点的振动方程或初相位;
3. 用P点的初相位写标准波动方程。

一平面简谐波以400 m·s^{-1}的波速在均匀媒质中沿x 轴正向传播.已知波源的振动周期为0.01s 、振幅为0.2m. 设以波源振动经过平衡位置且向y 轴正向运动作为计时起点，写出以距波源2m处P为坐标原点的波动方程。

$$u = 400, T = 0.01, \lambda = 4m \qquad \phi_0 = \frac{3}{2}\pi \text{或} -\frac{1}{2}\pi$$

$$P: \quad \phi_p = \frac{1}{2}\pi \text{或} -\frac{3}{2}\pi$$

$$y_p = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = 0.2\cos\left[200\pi\left(t \mp \frac{x}{400}\right) + \frac{1}{2}\pi\right]$$

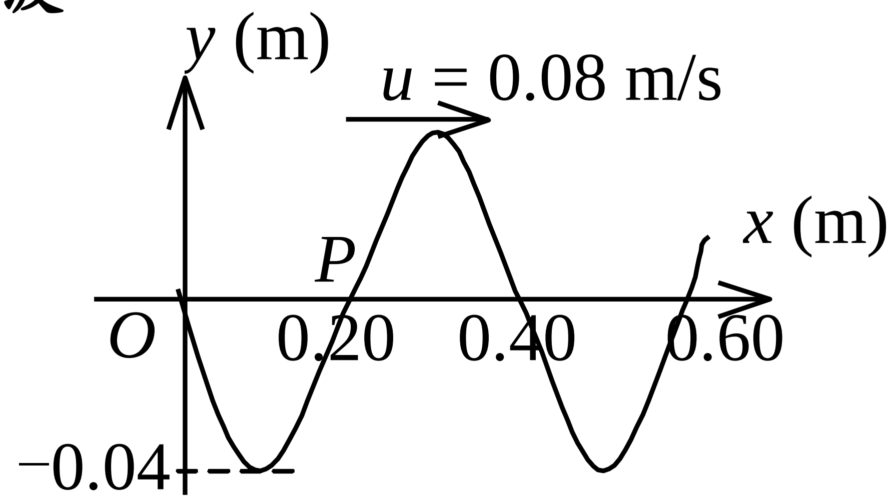
2. 已知波形曲线，求振动方程！

已知t=0时的波形曲线

例1、一平面简谐波在$t = 0$ 时刻的波形图，求

(1) 该波的波动表达式;

(2) P处质点的振动方程.



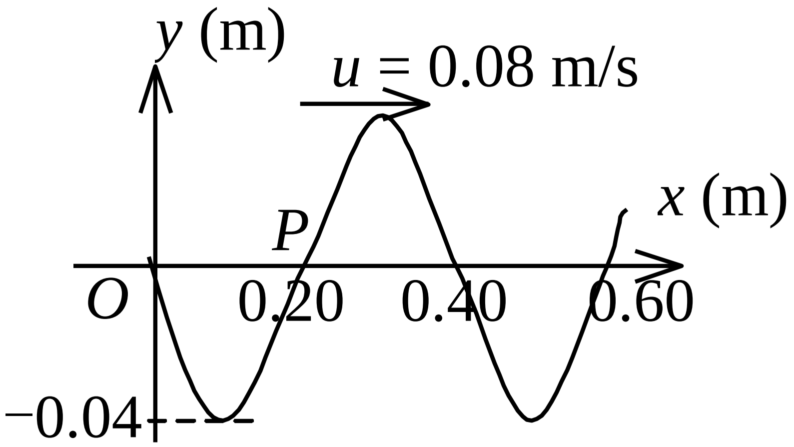
1.写出t=0以波源为坐标原点的波动方程；找到对应的所有参数

2. 写出O点的振动方程;

3. 用P点的初相位写振动方程。

$u=0.08, A=0.04, \lambda=0.4m,$

$\therefore T=5\text{s}, \varpi=0.4\pi$



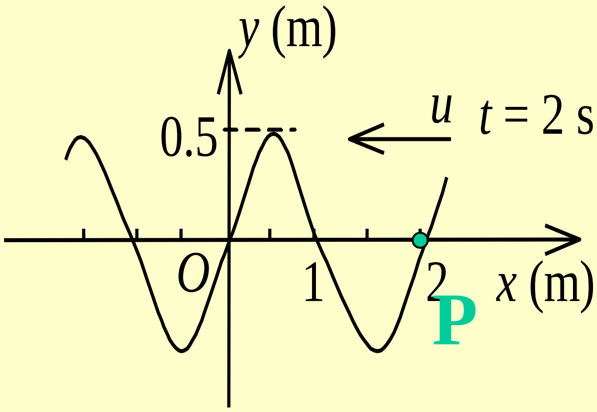
$$\phi_0=\frac{3}{2}\pi\text{或}-\frac{1}{2}\pi$$

$$\phi_p=\frac{1}{2}\pi\text{或}-\frac{3}{2}\pi$$

$$y_{\mathrm{p}}=A\cos(0.4\pi t+\frac{1}{2}\pi)$$

已知t=2s时的波形曲线

沿x轴负方向传播的平面简谐波在$t = 2$ s时刻的波形曲线如图所示，设波速$u = 0.5$ m/s．求：原点O的振动方程．

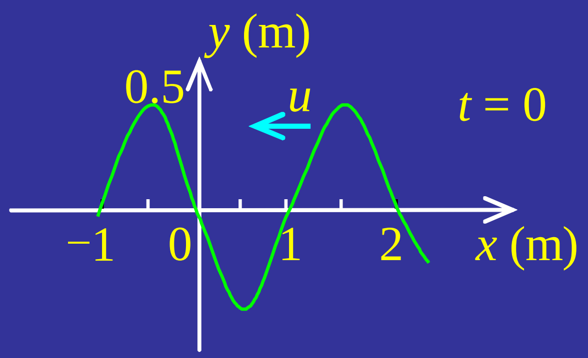


解：方法一 $T = \dfrac{\lambda}{u} = \dfrac{2}{0.5} = 4(\text{s})$

$t = 2$ s =T/2。则$t = 0$时波形比题图中的波形倒退$\lambda/2$，如图。

此时$y_0 = 0$，且朝y 轴负方向运动，

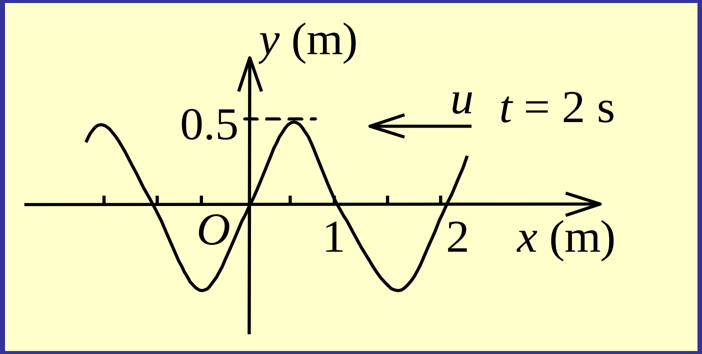
∴ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$



∴原点O的振动方程为

$$y = 0.5\cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)(\text{SI})$$

方法二 $T=\dfrac{\lambda}{u}=\dfrac{2}{0.5}=4(\mathrm{s})$



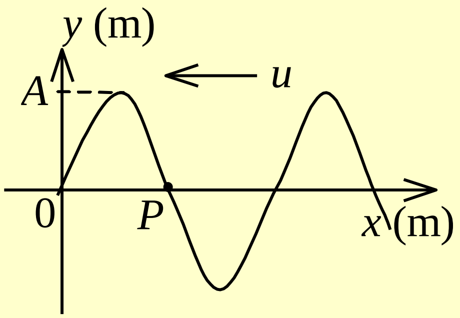
原点O的振动方程为

$$y=0.5\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-2)+\frac{3}{2}\pi\right](\mathrm{SI})$$

$$=0.5\cos\left(\frac{1}{2}\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)(\mathrm{SI})$$

已知t=2s时的波形曲线

44、如图所示为一平面简谐波在t = 2 s时刻的波形图，该简谐波的表达式是



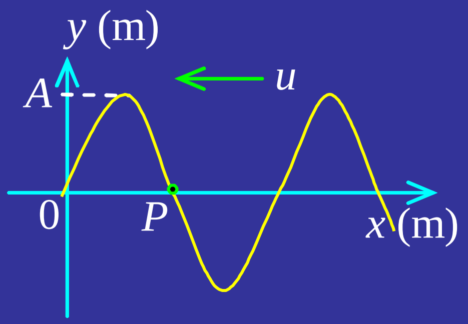
$y = A\cos[2\pi\frac{u}{\lambda}(t-2+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$ ；

P处质点的振动方程是 $y_P = A\cos[2\pi\frac{u}{\lambda}(t-2)+\frac{\pi}{2}]$.

（该波的振幅A、波速u与波长λ为已知量）

解：若以此时为计时零点，以O点作为坐标原点，则

$\because \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\dfrac{u}{\lambda} \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$



$\therefore$波动方程为 $\quad y = A\cos[2\pi\dfrac{u}{\lambda}(t' + \dfrac{x}{u}) - \dfrac{\pi}{2}]$

若以2s前为计时零点，显然有 $t' = t - 2$

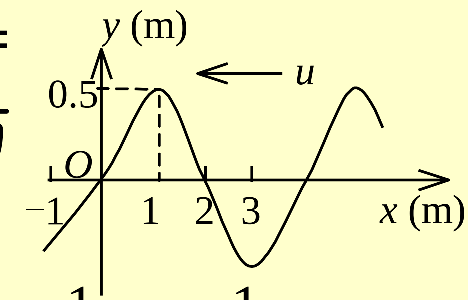
$\therefore$以2s前为计时零点波动方程为

$$\boxed{y = A\cos[2\pi\frac{u}{\lambda}(t - 2 + \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}]}$$

当 $x = \lambda/2$ 时，

$$\boxed{y_p = A\cos[2\pi\frac{u}{\lambda}(t - 2 + \frac{\lambda/2}{u}) - \frac{\pi}{2}] = A\cos[2\pi\frac{u}{\lambda}(t - 2) + \frac{\pi}{2}]}$$

19、一沿x轴负方向传播的平面简谐波在t = 2 s时的波形曲线如图所示，则原点O的振动方程为



(A) $y = 0.50\cos(\pi t + \frac{1}{2}\pi)$ **(SI).** **(B)** $y = 0.50\cos(\frac{1}{2}\pi t - \frac{1}{2}\pi)$ **(SI).**

(C) $y = 0.50\cos(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi)$ **(SI).** **(D)** $y = 0.50\cos(\frac{1}{4}\pi t + \frac{1}{2}\pi)$ **(SI).**

解：**t=2s**时**O**点的相位为 $-\frac{\pi}{2}$ ***or*** $\frac{3\pi}{2}$

而**t=2s**时**(A)**、**(B)**、**(C)**、**(D)**的相位分别为 $\frac{5}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \pi$

显然，只有（**C**）符合上式。

已知波形曲线—求振动方程（一般解法）