高等数学 A1

浙江理工大学期中试题汇编

（答案册 下）

学校：________________

专业：________________

班级：________________

姓名：________________

学号：________________

（此试卷为 2021 年第二版）

目录

11 浙江理工大学 2006-2007 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题......1
12 浙江理工大学 2005-2006 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中 A 卷......4
13 浙江理工大学 2005-2006 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中 B 卷......6
14 浙江理工大学 2004-2005 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题......8
15 浙江理工大学 2003-2004 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题......11

（高数系列试卷见本书最后一页。如有其他需要，请加入 QQ 群获取其他资料）

试卷整理人：张创琦
版次：2021 年 8 月 9 日 第二版
微信公众号：创琦杂谈
QQ 号：1020238657（如果您觉得哪道题目答案或者试题有问题，请联系张创琦本人。十分感谢您的勘误！）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380
创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

在这里感谢我的高数老师以及其他老师们对我的鼎力帮助！（高数老师不让我写上她的名字，那我就在这里默默感谢她吧）

11 浙江理工大学 2006-2007 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题（每小题 4 分）

D. D. B. B. D. D.

第 6 小题的 B 中，在已知条件下区间端点处可能不连续。

二 填空题（每小题 4 分）

1. $a=$ ___2___，$b=$ ___-8___.

2. $(\frac{\pi}{2}-1)^{-\infty}=\infty$， $(\frac{\pi}{2}-1)^{+\infty}=0$.

3. $a=$ ___3___，$b=$ ___-2___.

4. $\frac{dy}{dx}=f'\left(x\sin x\right)\left(\sin x+x\cos x\right)$

5. -1/6.

6. 0.

三 求极限（每小题 6 分）

1. 数列$\{x_n\}$通项$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解：因为$n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

2.计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$$

四 求导数（每小题 7 分）

1．设$y=\left(1+x^2\right)e^{\sin\sqrt{x}}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx}=2x\cdot e^{\sin\sqrt{x}}+\left(1+x^2\right)\cdot e^{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2．设$\begin{cases}x=t^2+t+1\\ y=\sin t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dx}{dt}=2t+1,\frac{dy}{dt}=\cos t\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\cos t}{2t+1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{-(2t+1)\sin t-2\cos t}{(2t+1)^3}$$

3．若隐含数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\left(x^2+y^2\right)=\arctan\frac{y}{x}$ 确定，求 $y'(1)$ （不是求 $y'(0)$）

解：方程两边分别关于 x 求导，把 y 看作 x 的函数：

$$\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2y\cdot y')=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'\cdot x+y}{x^2}$$ 即 $2x+2y\cdot y'=y'\cdot x+y$

$$\therefore y'=\frac{y-2x}{2y-x}$$

当 $x=1$ 时， $y=0$

所以 $y'(1)=2$

五（本题满分 8 分）

证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 上必有唯一的实根 $x_n(n>2)$，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

（原题应该改成这个方程： $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1=0$ 。）

证明：（1）先证有唯一实根

a)设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$，在 $[0,1]$ 上连续，

又 $f(0)=-1<0, f(1)=n-1>0(\because n>2)$

所以由零点定理知： $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个零点。

b）因为 $\forall x\in(0,1)$ 以及 $n>2$， $f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至多存在一个零点。

因此，方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 上必有唯一的零点。

（2）再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

记该唯一零点为 x_n 。

（注： x_n 是与 n 有关的量， x_3 是方程 $x^3+x^2+x-1=0$ 的根， x_4 是方程 $x^4+x^3+x^2+x-1=0$ 的根…，所以 $\{x_n\}$ 为一数列。）

a)由上述知，$\forall n>2, 0<x_n<1$，即数列有界。

b)$\because x_{n-1}^{n-1}+x_{n-1}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}^2+x_{n-1}-1=0 \Rightarrow x_{n-1}^{n}+x_{n-1}^{n-1}+\cdots+x_{n-1}^2+x_{n-1}-1>0$

而 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n-1=0$，所以 $x_n<x_{n-1}$，即数列单调减少。

因此$\{x_n\}$极限存在。

（3）求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$\because x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n-1=0$

$\therefore x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n+1=2 \Rightarrow \left(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n+1\right)\left(x_n-1\right)=2\left(x_n-1\right)$

即$\left(x_n^{n+1}-1\right)=2\left(x_n-1\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^{n+1}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(x_n-1\right)$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n+1}=0$

$\therefore 0-1=2\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2}$。

六（本题满分 6 分）

设 $f(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点$\xi\in(0,a)$，使

$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明：构造函数$F(x)=xf(x)$

因为$F(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$F(a)=af(a)=0=F(0)$

所以由罗尔定理知：至少存在一点$\xi\in(0,a)$，使得$F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

七 证明题（本题满分 5 分）

当$x>0$时，$\left(x^2-1\right)\ln x\ge(x-1)^2$

证明：

（1）当$x>1$时，即证$(x+1)\ln x\ge x-1$

设 $f(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$，则$\forall x>1$，$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}>0$

所以 $f(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$ 在$[1,+\infty)$上单调增加，则$\forall x>1$，$f(x)>f(1)=0$。

（2）当$x<1$时，即证$(x+1)\ln x\le x-1$

令$t=\dfrac{1}{x}$，则$t>1$，即证$\left(t+1\right)\ln t\ge t-1$，（1）已得证。

（3）当$x=1$时，$0\ge 0$显然成立。

12 浙江理工大学 2005-2006 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. D；　2. D；　3. A；　4. C；　5. B；　6. D

二 填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. 0；

2. $+\infty$ 或∞，0；

3. 3，-2；

4. $(\sin x+x\cos x)f'(x\sin x)$；

5. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$；

6. 0.

三 求极限（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 解：$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，　………2 分

因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，　…………………………4 分

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$.　…………………….. 6 分

2. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+1}{x-2})^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x-2})^{2x-1}$　…………………2 分

$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{3}{x-2})^{\frac{x-2}{3}}]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}$　……………………4 分

$=e^6$.　……………………….. 6 分

四 求导数（本题共 3 小题，每小题 7 分，满分 21 分）

1. 解：$\dfrac{dy}{dx}=((1+x^2)e^{\sin\sqrt{x}})'=(1+x^2)'e^{\sin\sqrt{x}}+(1+x^2)(e^{\sin\sqrt{x}})'$　……………...3 分

$=2xe^{\sin\sqrt{x}}+(1+x^2)e^{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　……………………7 分

2. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\cos t}{2t}$，　……………………………..3 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-t\sin t-\cos t}{4t^3}.$$ ……………………………7 分

3. 解：因为 $x+y=\sin y$，对 x 求导，得

$$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\cdot\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin y\cdot(\frac{dy}{dx})^2+\cos y\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$ ………3 分

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y-1}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin y}{(\cos y-1)^3}$. ………………..5 分

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1-\frac{\pi}{2}\\ y=\frac{\pi}{2}}}=-1,\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1-\frac{\pi}{2}\\ y=\frac{\pi}{2}}}=-1.$$ …………………………7 分

五（本题满分 8 分）

解：过点 P 的切线方程为 $y=-2a(x-a)+b$，

它与两坐标轴的交点 $x_0=a+\frac{b}{2a}$，$y_0=2a^2+b$，因而所围成的面积

$S=\frac{1}{2}x_0y_0-A$ （其中 A 为抛物线与坐标轴所围在第一象限中的面积），

$$S=\frac{1}{2}(a+\frac{b}{2a})(2a^2+b)-A$$

$$S(a)=\frac{1}{4}(a^3+2a+\frac{1}{a})-A$$ ………………..4 分

$S'(a)=\frac{1}{4}(3a^2+2-\frac{1}{a^2})$，令 $S'(a)=0$，得 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{2}{3}$，因为在 $0<a<+\infty$ 中只有唯一驻点，且存在最小值，所以当 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{2}{3}$ 时，取到最小值.即 $P(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3})$. ……….8 分

六（本题满分 6 分）

解：$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$（$k>0$）在 $(0,\ +\infty)$ 内连续，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex},$$

令 $f'(x)=0$，得惟一驻点 $x=e$.知 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 内严格单调增，在 $(e,\ +\infty)$ 内严格单调减.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - \dfrac{x}{e} + k) = -\infty$，

$f(e) = \ln e - \dfrac{e}{e} + k = k > 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x - \dfrac{x}{e} + k) = \lim\limits_{x\to +\infty} -x(-\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{e} - \dfrac{k}{x}) = -\infty$，

按零点定理知 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 及 $(e, +\infty)$ 内分别至少有一个零点. 由于 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 及 $(e, +\infty)$ 内严格单调，知 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 及 $(e, +\infty)$ 内分别有且仅有一个零点. 因此 $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为 2 个.

七、（本题满分 5 分）

证：记 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$，由 $a < x_1 < b,\quad a < x_2 < b,\quad 0 < \lambda < 1$ 可知 $a < x < b$,

由泰勒公式 $f(x_1) = f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x)^2$

$= f(x) + f'(x)(1-\lambda)(x_1 - x_2) + \dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x)^2$，$\xi_1$ 在 x 与 x_1 之间，

$f(x_2) = f(x) + f'(x)(x_2 - x) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x)^2$

$= f(x) + f'(x)\lambda(x_2 - x_1) + \dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x)^2$，$\xi_2$ 在 x 与 x_2 之间，

于是 $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f(x) + \lambda\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x)^2 + (1-\lambda)\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x)^2 > f(x)$，

所以有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

13 浙江理工大学 2005-2006 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中 B 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 D　　2 D　　3 A　　4 C　　5 D　　6 D

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1　0　　2　$0, +\infty$　　3　$3, -2$

4　$f'(x\cdot\sin x)\cdot(\sin x + x\cdot\cos x)$　　5　$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$　　6　0

三 求极限（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1 解：

$\because x_n \le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$

又$\because x_n \le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,$

由夹逼定理得，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

2 解：

原式=$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2+3}{x-2})^{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{3}{x-2})^{\frac{x-2}{3}}]^{\frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6$　　(1^∞型)

四 求导数（本题共 3 小题，每小题 7 分，满分 21 分）

1 解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\cdot e^{\sin\sqrt{x}}+(1+x^2)\cdot e^{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 解：

$\because \frac{dx}{dt}=2t, \frac{dy}{dt}=\text{cos}t,$ ①

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\text{cos}t}{2t},$

$\therefore \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=\frac{d(\frac{\cos t}{2t})}{dt}=\frac{-sint\cdot 2t-cost\cdot 2}{4t^2}$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{-sint\cdot 2t-cost\cdot 2}{4t^2\cdot 2t}=\frac{-t\cdot\text{sin}t-\text{cos}t}{4t^3}.$

3 解：

方程两边关于 x 求导，把 y 看作 x 的函数：

$1+y'=cosy\cdot y'$，①

$\therefore y'=\frac{1}{cosy-1}, \frac{dy}{dx}\Big|_{\underbrace{x=1-\frac{\pi}{2}}_{y=\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{0-1}=-1$　（大括号没有意义，因为我太菜了，不会插入多行数据）

①两边关于 x 求导，把 y, y'看作 x 的函数。

$y''=-siny\cdot y'\cdot y'+cosy\cdot y''$

$\therefore y''=\frac{siny\cdot(y')^2}{cosy-1}$　　$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\underbrace{\underbrace{x=1-\frac{\pi}{2}}_{y=\frac{\pi}{2}}}_{y'=-1}}=\frac{1\times(-1)^2}{0-1}=-1$　（大家能看懂就好哈，我不会录入右下角的这部分内容）

五 （本题满分 8 分）解：

∵抛物线与两坐标轴所围成区域的面积固定，

∴要使切线与抛物线及两坐标轴所围成的面积最小，即使切线与两坐标轴所围成的三角形面积最小。

经分析得，当$a<1$时，才有最小值。

$y' = -2x, \implies k_p = -2a, \quad L: y-(1-a^2) = -2a\cdot(x-a)$
令$x=0$，得 $y_0 = 1-a^2+2a^2 = 1+a^2$.

令$y=0$，得 $x_0 = \frac{a^2-1}{-2a} + a = \frac{1+a^2}{2a}$

$S_{\Delta Ox_0y_0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2a}\cdot 1+a^2 = \frac{(1+a^2)^2}{4a}$

$S'_a = \frac{(1+a^2)(3a^2-1)}{4a^2}$

令$S'_a = 0$，得(0,1)上唯一驻点，$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

当 $a < \frac{\sqrt{3}}{3}$时，$S'_a < 0$，当 $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$时，$S'_a > 0$,

$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$为极小值点，同时也为最小值点。

∴P 点坐标: $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3})$

六 （本题满分 6 分）解：

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, $x = e$为唯一驻点。

当 $0 < x < e$时，$f'(x) > 0$，当$x > e$时，$f'(x) < 0$,
$\therefore x = e$是最大值点。
$f_{\max} = f(e) = k$,

又$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$,

$\therefore k > 0$ 时，$f(x)$在$(0, +\infty)$内有两个零点。

七 （本题满分 5 分）解：
本题答案和第 8 套（2011-2012 高数 A1 期中试题）答案一样，故不再重复录入。

14 浙江理工大学 2004-2005 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题

1、B　2、A　3、C　　4、C　　5、B

二 填空题

1、 3A　2、π　3、$g(\sin^2 x)\sin 2x$　4、$\frac{1}{x}$

5、$x^2\sin(x+25\pi) + 100x\sin(x+\frac{49}{2}\pi) + 1225\sin(x+24\pi)$

三 计算题

2、 原式$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}$。

3、 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2$

或原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^2$

4、 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\cos x\cdot x^3}=\dfrac{1}{2}$

5、 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sec^2x\cdot tgx}{6x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\sec^2x=\dfrac{1}{3}$

6、

$\because\ y=(\ln x)^x$

$\therefore \ln y=x\cdot\ln(\ln x)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{y}y'=\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}$

$\therefore y'=y\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]=(\ln x)^x\left[\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right]$

6、 $x+2y-\cos y=0$ 两边关于 x 求导得

$1+2y'+\sin y\cdot y'=0 \qquad (2)$

$\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{2+\sin y} \qquad (3)$

对（2）式两边再关于求一次导，得

$2y''+\cos y\cdot(y')^2+\sin y\cdot y''=0$ 代入（3）得

$y''=-\dfrac{\cos y}{(2+\sin y)^3}$

7、

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d(t)}{dx}=\dfrac{\frac{dt}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{f''(t)}$

四（1）

$\because\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^k\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & k>0\\ \text{不存在} & k\le0\end{cases}$

又$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，$f(0)=0$

$\therefore$当$k>0$时，$f(x)$连续。

（2）

$$\because f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\tfrac{1}{x}=\begin{cases}0, & k>1\\ \text{不存在}, & k\le 1\end{cases}$$

又$f'_-(0)=0$

$\therefore$当$k>1$时，$f'_+(0)=f'_-(0)$，即$f(x)$可导。

（3）

设$k>1$，此时

$$f'(x)=\begin{cases}(x^k\sin\frac{1}{x})'=kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ f'(0)=0, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$\therefore f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(kx^{k-1}\sin\tfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\tfrac{1}{x})$$

$$\overset{k>1}{=}0-\lim_{x\to 0^+}x^{k-2}\cos\tfrac{1}{x}=\begin{cases}0, & k>2\\ \text{不存在}, & k\le 2\end{cases}$$

又$f'_+(0)=f'_-(0)=0$

$\therefore$当$k>2$时，导数连续。

五

设$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续

$\therefore F(x)$在$[a,b]$上也连续

又$F(a)=\frac{1}{2}[f(a)-f(b)]$

$F(b)=\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]$

$\therefore$当$f(a)=f(b)$时，$F(a)=F(b)=0$

此时取$\xi=a$或b

当$f(a)\neq f(b)$时，$F(a)\cdot F(b)<0$

$\therefore$由零点存在定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$

使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

$\therefore$命题成立。

六

设$F(x)=f(x)e^{g(x)}$

则$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微，且$F(a)=F(b)=0$

$\therefore$由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$

而$F'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)g'(x)e^{g(x)}$

$\therefore F'(\xi)=e^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]$

$\because e^{g(\xi)}\neq 0$

$\therefore f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

15 浙江理工大学 2003-2004 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1 C　　2 D　　3 C　　4 B　　5 D

二 填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1　e^{-3}　　2　$\mathrm{d}x$　　3　0

4　$x=1, x=0$　　5　$e^{f(\xi)}\cdot f'(\xi)\cdot(b-a)$

三 解答题（每小题 5 分，共 30 分）

1 解：

原式$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{2}{n^2}=2$

2 解：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x\cdot sinx\cdot tanx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx(1-cosx)}{x^3}=\frac{1}{2}$

3 解：

原式$=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}[\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3]}=$(拉格朗日)$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x lna+b^x lnb+c^x lnc/a^x+b^x+c^x}{1}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}$

4 解：

$$y'=1\cdot\arcsin\frac{y}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}$$

5 解：

方程两边关于 x 求导，

$2x+2y\cdot y'-2+3y'=0$

$y'=\frac{2-2x}{2y+3}$

设切点(x_0, y_0).

$y'|_{(x_0,y_0)}=-2$,　　即$\frac{2-2x_0}{2y_0+3}=-2$　①

$x_0{}^2+y_0{}^2-2x_0+3y_0+2=0$　②

解得：$\begin{cases}x_0=2\\y_0=-1\end{cases}$，$\begin{cases}x_0=0\\y_0=-2\end{cases}$

$\therefore$ 所求切线：$L_1: 2x+y+2=0$，$L_2: 2x+y-3=0$

6 解：

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$

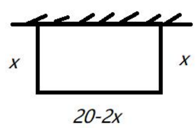
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$

四 （8 分）解：

$S=x\cdot(20-2x)=20x-2x^2$

令$S'_x=20-4x=0$

解得唯一驻点：$x=5$，即为所求。



五 （6 分）

证明：$\varphi'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$

$\forall x>0, f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x \quad (\xi\in(0,x))$

$\because f'(x)$单增， $\therefore f'(\xi)<f'(x)$.

$\therefore f(x)=f'(\xi)\cdot x<f'(x)\cdot x$

$\therefore \varphi'(x)>0$，即$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增。

六 （6 分）

解：（1）要使$f(x)$在$x=0$ 处连续，即使$\lim\limits_{x\to 0}x^n\cdot sin\frac{1}{x}=0$

（2）要使$f(x)$在$x=0$ 处可微，即使$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \sin\frac{1}{x}-0}{x-0}$存在，$\Rightarrow\ n-1>0$, 即$n>1\Rightarrow f'(0)=0$

（3）$f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\cdot sin\frac{1}{x}+x^n\cdot cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2}) & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$

若使$f'(x)$在$x=0$ 处连续，即使$\lim\limits_{x\to 0}(nx^{n-1}\cdot sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cdot cos\frac{1}{x})$存在，$\Rightarrow\ n-2>0$, 即$n>2$

高等数学试题资料目录

1 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

2 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

3 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

4 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

5 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

6 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

7 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

8 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

9 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

10 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

11 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

12 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

13 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）

14 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）

15 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

16 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）

17 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

18 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）

19 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

20 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）

21 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

22 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）

23 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）

24 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）