



# 高等数学 A1

浙江理工大学期末试题汇编

(试卷册 上)

学校: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

班级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

(此试卷为 2021 年第二版)

## 目录

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	1
2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	5
3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	8
4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	12
5 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷.....	16
6 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	19
7 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	23
8 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	27
9 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	31
10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	35

说明：1 高数系列试卷见本书最后一页。如有其他需要，请加入 QQ 群获取其他资料；

2 《高等数学 A1》中的期末 A 卷是学期末尾进行的统一考试试卷，B 卷是开学后一两周内进行的补考试卷。

## 写在前面

青春透明如醇酒，可饮，可尽，可别离。我独钟爱席慕蓉女士的诗句，在她的笔下，青春有着泛黄的扉页，是一本太仓促的书，青春是踏月的旅行，是月光下的华裳，青春是热泪汇成的河流，是戴着祝福的离别。诗里的青春是细腻优美的，然而，此刻当你翻开这本试卷册，你的青春便和这几套高数试卷结下不解之缘。

我始终相信，能来到大学读书的你们，也曾有过宏图大志，渴望在崭新的大学阶段好好学习，不负韶华，让成绩名列前茅，甚至拿到奖学金。但是实际又有多少人平时课上开小差刷手机，作业不认真完成，最后逼近期末，才发现复习竟变成了预习。

你可曾发现过吗？大概率上，我们曾经只“想”做到的事情，直到今天也没做到。当你看到你的同学纤细的手指盈跃在钢琴琴键上时，当你看到你的情敌歌声飘扬，怀抱里的吉他散发出无限魅力的时候，当你看到专业的学霸们闪着自信的光芒登上领奖台的时候，你的内心是否有过诸多羡慕呢？如果有，那你为自己的这份羡慕付出过足够的努力吗？可叹的是，更多的人在短暂的奋发后又流于过往颓丧的生活。

众所周知，行动起来，是打破焦虑与幻想最理想的武器。在期末备考高数的时候，我亲身经历了从知识点从陌生到熟悉的过程，遇到不懂的题，我会去查阅课本，去找相关视频，去问同学。就这样，做完了、摸熟了这套题之后，对于百分之九十的题型我都了然于心了，最后也拿到了九十多的分数。

我们常常说，坚持下去，就是无论遇到多大的困难都不要放弃。所以，在学习的过程中，请一定不要停留在想的层面，去做题，去思考，去讨论。而在做这些事情的时候，我们的内心一定充盈着无比的充实感和幸福感。

十年以后，你想成为什么样的人？

大学阶段是人生的起点，我们第一次可以自主决定自己的人生，我们现在所做的每一个选择，所做出的每一次努力，都一点一滴地构造成了我们未来的模样。

诸君，愿以梦为马，不负韶华！

与君共勉，我们山顶见！

（有删改）

## 资料说明

试卷整理人：张创琦

版次：2021 年 8 月 9 日 第二版

微信公众号：创琦杂谈

本人 QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380

创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

微信公众号：用于提前告知资料更新内容，分享一些学习内容和一些优秀的文章，我也会写一些文章，主要是以大学生视角进行一些事情的审视批判。

创琦杂谈学习交流群：更新每个科目（不仅限于数学）的学习资料，群里可进行学习等相关问题的探讨。

创琦杂谈大学数学学习交流群：群里可以进行高等数学、线性代数、概率论与数理统计、离散数学、复变函数、数学建模等等数学科目的问题的交流，大一大二等在修同学和考研同学都可以在里面学到很多知识，群里数学考试用相关资料和数学课外补充资料都很多，大家可自行下载阅览。群相册用于更新一些小的知识点，并进行一些勘误。群里讨论问题的氛围也非常浓厚，欢迎大家加群学习。

如果有任何问题可以联系我的 QQ 哈，我的性格很开朗，喜欢结交更多的朋友，欢迎大家加我的联系方式哈~

**版权声明：**试卷整理人：张创琦，试卷首发于 QQ 群“创琦杂谈学习交流群”和“创琦杂谈大学数学学习交流群”，转发前需经过本人同意，侵权后果自负。本资料只用于学习交流使用，禁止进行售卖、二次转售等行为，一旦发现，本人将追究法律责任。解释权归本人所有。

在这里感谢我的高数老师以及其他老师们对我的鼎力帮助！（高数老师不让我写上她的名字，那我就在这里默默感谢她吧）

# 1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（共 24 分，每题 4 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

- 1 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$ ，则  $k =$  ( )  
 A.  $k = -2$                       B.  $k = -1$                       C.  $k = 1$                       D.  $k = 2$
- 2 若曲线  $y = x^2 + ax + b$  与  $y = x^3 + x$  点  $(1, 2)$  处相切，则  $a, b$  的值为 ( )  
 A.  $a = 0, b = -2$               B.  $a = 2, b = -1$               C.  $a = 1, b = -3$               D.  $a = -3, b = 1$
- 3 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某领域内连续，且  $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ ，则在点  $x=0$  处  $f(x)$  ( )  
 A. 不可导                      B. 可导且  $f'(0) \neq 0$               C. 取得极大值                      D. 取得极小值
- 4 若  $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x + C$ ，则  $f(x) =$  ( )  
 A.  $e^x$                       B.  $e^{-x}$                       C.  $-2e^{-2x}$                       D.  $2e^{-2x}$
- 5 反常积分  $\int_{-\infty}^0 e^{-kt} dt$  收敛，则 ( )  
 A.  $k > 0$                       B.  $k < 0$                       C.  $k \geq 0$                       D.  $k \leq 0$
- 6 微分方程  $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$  的一个特解是 ( )  
 A.  $y = (x + C)^2$               B.  $y = x^3 + 1$                       C.  $y = C(1 + x)^3$                       D.  $y = (x + 2)^3$

二 填空题（共 24 分，每题 4 分，把答案填在题中横线上）

- 1 曲线  $y = 1 - e^{-x^2}$  的凹区间是\_\_\_\_\_。
- 2 函数  $y = \frac{\ln x}{x}$  的极大值为\_\_\_\_\_。
- 3  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx =$ \_\_\_\_\_。
- 4 设  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$ ，则  $f(x)$  的第一类间断点是\_\_\_\_\_。
- 5 设  $\int f(x) dx = \sin x + C$ ，则  $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$ \_\_\_\_\_。
- 6 方程  $xy' - (1 + x^2)y = 0$  的通解为\_\_\_\_\_。

三 计算题（共 30 分，每题 6 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1 计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ 。

2 求不定积分  $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ 。

3 求定积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

4 设  $y=y(x)$  是由方程  $e^y + xy = e$  确定的函数，求  $y'(0), y''(0)$ 。

5 求微分方程  $y'' + 2y' + 9y = 8e^{-x}$  的通解。

四 综合题（共 14 分，每题 7 分，应写出具体的解题过程）

1 设曲线  $y = x^2$  与直线  $x=2$  及  $x$  轴所围成的平面图形为  $D$ ，求：

(1)  $D$  的面积  $A$ ；(2)  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所成旋转体的体积  $V_y$ 。

- 2 设  $F(x) = f(x)g(x)$ ，其中  $f(x), g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内满足以下条件： $f'(x) = g(x)$ ,  $g'(x) = f(x)$ , 且  $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$ ，求：
- (1)  $F(x)$  所满足的一阶微分方程；(2)  $F(x)$  的表达式。

五 证明题（共 8 分，每题 4 分）

- 1 证明：当  $x > 0$  时， $1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) > \sqrt{1 + x^2}$ 。

2. 设函数  $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ ，证明：存在  $\xi \in (1, 2)$ ，使得  $f(2) = \xi e^{\xi^2} \ln 2$ 。



## 2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

### 一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设  $x_n \leq a_n \leq y_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ ,  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  和  $\{a_n\}$  均为数列, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ( )

- A. 存在且等于零                      B. 存在但不一定等于零  
C. 一定不存在                        D. 不一定存在

2. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,  $f(0)=0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$  ( )

- A.  $-2f'(0)$                       B.  $-f'(0)$                       C.  $f'(0)$                       D. 0

3. 下列各式正确的是 ( )

- A.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$                       B.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$   
C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$                       D.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = -e$

4.  $f(x) = \cos x$ , 则  $\int \frac{1}{x^2} f' \left( \frac{1}{x} \right) dx =$  ( )

- A.  $-\cos \frac{1}{x} + C$                       B.  $\cos \frac{1}{x} + C$                       C.  $-\sin \frac{1}{x} + C$                       D.  $\sin \frac{1}{x} + C$

5. 对反常积分  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ , 下列结论正确的是 ( )

- A.  $p=1$  时该反常积分收敛                      B.  $p>1$  时该反常积分收敛  
C.  $p \leq 1$  时该反常积分发散                      D.  $p<1$  时该反常积分收敛

6. 设  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$  是二阶常系数非线性微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的一个特解, 则 ( ) .

- A.  $a = -3$ ,  $b = 2$ ,  $c = -1$                       B.  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = -1$   
C.  $a = -3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$                       D.  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$

### 二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 函数  $f(x) = x - \ln(1+x)$  在区间 \_\_\_\_\_ 上单调减少;

2. 函数  $f(x) = \sin x$ ,  $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$ , 则  $\varphi(x) =$  \_\_\_\_\_, 其定义域为 \_\_\_\_\_

3. 函数  $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$  的驻点个数为 \_\_\_\_\_

4. 设  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上为偶函数, 则  $\int_{-2}^2 x[x + f(x)]dx =$  \_\_\_\_\_

5. 设函数  $y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} =$  \_\_\_\_\_;

6. 若  $f(x) = \begin{cases} b(1 + \sin x) + a + 2, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 则  $a =$  \_\_\_\_\_  $b =$  \_\_\_\_\_;

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{1 - \cos x}$

2. 求不定积分  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

3. 求定积分  $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$

4. 设方程  $x^y = y^x$  确定的函数  $y = y(x)$ , 求  $y'$

5. 设  $y = \operatorname{arccot} \frac{x-1}{x+1}$ , 求  $dy$

6. 求微分方程  $y'' + 2y' - 3y = 2x + 3$  的通解

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分为 14 分）

1. 经过坐标原点作曲线  $y = \ln x$  的切线，该曲线  $y = \ln x$  与切线及  $x$  轴围成的平面图形为  $D$ 。求：

- (1)  $D$  的面积
- (2)  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积

2. 设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零，若对任意的  $x_0 \in I$ ，曲线  $y = f(x)$  在  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$ ， $x$  轴所围区域的面积恒为 4，且  $f(0) = 2$ ，求  $f(x)$  的表达式

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续，在  $(0, 1)$  内可导，且满足  $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$ ，证明：至少存

在一点  $\xi \in (0, 1)$  使  $f'(\xi) = 0$ 。（本题 4 分）

2、已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，且  $f''(x) > 0$ ，证明： $f(x) \geq x$

### 3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题只有一项符合要求，请把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$  的值是（ ）

- A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\infty$                       D. 不存在

2、设  $f(x) = \begin{cases} (x+2)\cos\frac{1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases}$ ，则  $f(x)$ （ ）

- A. 在点  $x = \pm 2$  都连续                      B. 在  $x = 2$  连续，在点  $x = -2$  间断  
C. 在点  $x = \pm 2$  都间断                      D. 在  $x = 2$  间断，在点  $x = -2$  连续

3、设由方程组  $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$  确定了  $y$  是关于  $x$  的函数，则  $\frac{dy}{dx}\big|_{t=0} =$ （ ）

- A.  $-\frac{e^y}{2}$                       B.  $-2e$                       C.  $-\frac{1}{2e}$                       D.  $\frac{1}{2e}$

4、下列等式中正确的是（ ）

A.  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$                       B.  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$

C.  $\frac{d}{dx} \int_x^b f(x) dx = f(x)$                       D.  $\int f'(x) dx = f(x)$

5、设

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx, \text{ 则}$$

（ ）

- A.  $P < M < N$                       B.  $M < P < N$                       C.  $P < N < M$                       D.  $kN < M < P$

6、已知二阶微分方程  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$ ，则其特解为（ ）

- A.  $e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$                       B.  $ae^{-x} \cos x + bxe^{-x} \sin x$   
C.  $xe^{-x}(a \cos x + b \sin x)$                       D.  $axe^{-x} \cos x + be^{-x} \sin x$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、若  $f(x) = \begin{cases} (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \ln(1+x) + k, & x \geq 0 \end{cases}$  处处连续，则  $k =$ \_\_\_\_\_.

2、 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则  $dy =$ \_\_\_\_\_.

3、 $y = 4x - \frac{1}{x} (x > 0)$  的反函数  $x = \varphi(y)$  在  $y = 0$  处的导数为\_\_\_\_\_.

4、设  $\int f(x) dx = xe^x - e^x + C$ ，则  $\int f'(x) dx =$  的\_\_\_\_\_.

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \left( \frac{\sin t}{t} - 1 \right) dt =$ \_\_\_\_\_.

6、 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\left( \sqrt[3]{1+x^2} - 1 \right) \left( \sqrt{1+\sin 2x} - 1 \right)}$ .

2、求  $f'(x)$ ，其中  $f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & x > 0 \\ x^2 + x, & x \leq 0 \end{cases}$ .

3、求不定积分  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$ .

4、求定积分  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$ .

5、已知  $f(x)$  的原函数为  $(1 + \sin x) \ln x$ ，求  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx$ .

6、求微分方程  $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1$  的特解.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分，应写出具体解题过程）

1、求函数  $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$  的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线。

2、在曲线  $y = x^2 (x \geq 0)$  上某点 A 处作一切线，若过点 A 作的切线与曲线  $y = x^2$  及 x 轴所围图形的面积为  $\frac{1}{12}$ ，求该平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V。

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，在  $(0,1)$  内二阶可导，且过两点  $(0, f(0))$  与  $(1, f(1))$  的直线与曲线  $y = f(x)$  相交于  $(c, f(c))$ ，其中  $0 < c < 1$ ，试证：至少存在一点  $\xi \in (0,1)$ ，使得  $f''(\xi) = 0$ 。

2、若  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，证明：
$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

## 4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题只有一项符合要求，请把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、设函数  $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  在  $x=0$  处下列叙述错误的是（ ）

A.  $k > 0$  时连续      B.  $k > 1$  时连续不可导      C.  $k > 1$  时可导      D.  $k > 2$  时导函数连续

2、设  $e^{-2x}$  是  $f(x)$  的一个原函数，则  $f'(x) =$ （ ）

A.  $-8e^{-2x}$       B.  $-4e^{-2x}$       C.  $4e^{-2x}$       D.  $2e^{-2x}$

3、若  $f(x)$  在点  $a$  的领域内有定义，且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = 2$ ，则下列结论正确的是（ ）

A.  $f(x)$  在点  $a$  的领域内单调增加      B.  $f(x)$  在点  $a$  的领域内单调减少  
C.  $f(a)$  为函数  $f(x)$  的极大值      D.  $f(a)$  为函数  $f(x)$  的极小值

4、已知  $\int_1^x f(t^2) dt = x^3$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} =$ （ ）

A. 1      B. 2      C. 3      D. 0

5、若积分  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$  收敛，则  $k$  满足（ ）

A.  $k < 1$       B.  $k > 1$       C.  $k = 0$       D.  $k = e$

6、微分方程  $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$  的通解为（ ）

A.  $\frac{x^3}{3} + xy^2 = C$       B.  $\frac{x^3}{2} + xy^2 = C$       C.  $x^3 + xy^2 = C$       D.  $\frac{x^3}{3} - xy^2 = C$

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、 $\int_{-3}^3 (x + \sqrt{9-x^2}) dx =$ \_\_\_\_\_.

2、函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$  在  $(0, +\infty)$  内零点的个数是\_\_\_\_\_个。

3、若  $f'(e^x) = 1 + x$ ，则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

4、微分方程  $dy - 2xy^2 dx = 0$  满足条件  $y(1) = -1$  的特解为\_\_\_\_\_.



5、设参数方程  $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ ，则曲线  $y=y(x)$  在  $x=3$  处切线的斜率为\_\_\_\_\_.

6、反常积分  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$ \_\_\_\_\_.

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1+t)e^t dt}{x \ln(1+x)}$ .

2 求  $\int_1^3 f(x-2)dx$ ，其中  $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ .

3 求不定积分  $\int e^{2\sqrt{x}} dx$ .

4 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ .

5、设函数  $y = y(x)$  由方程  $e^y + xy = e$  所确定，求  $dy$ .

6、已知  $2x \int_0^1 f(x) dx + f(x) = \ln(1+x^2)$ ，求  $\int_0^1 f(x) dx$ .

#### 四 综合题（本题 8 分，应写出具体解题过程）

在曲线  $y = x^2 (x \geq 0)$  上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为  $\frac{1}{12}$ ，试求：（1）切点 A 的坐标；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：若  $f(x)$  为连续的奇函数，则  $\int_0^x f(t)dt$  是偶函数。

2、设  $f(x)$  在  $[0,2]$  上连续，在  $(0,2)$  内可导，且有  $f(2)=5f(0)$ 。试证明：在  $(0,2)$  内至少存在一点  $\xi$ ，使得  $(1+\xi^2)f'(\xi)=2\xi f(\xi)$ 。

## 5 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

### 一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

- 函数  $y = x - \ln(1 + x^2)$  在定义域内( )  
(A) 无极值 (B) 极大值为  $1 - \ln 2$  (C) 极小值为  $1 - \ln 2$  (D)  $f(x)$  非单调函数
- 当  $x \rightarrow 0$ ，则  $x \sin x$  是  $\ln(1 + x)$  的( )  
(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 同阶无穷小 (D) 等价无穷小.
- 对反常积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ，下列结论正确的是( )  
(A)  $p > 1$  时收敛 (B)  $p < 1$  时发散 (C)  $p = 1$  时收敛 (D)  $p \geq 1$  时发散
- 已知  $\int f(x) dx = xe^x - e^x + C$ ，则  $\int f'(x) dx =$  ( )  
(A)  $xe^x - e^x + C$  (B)  $xe^x + e^x + C$   
(C)  $xe^x + C$  (D)  $xe^x - 2e^x + C$
- 曲线  $y = x(x-1)(2-x)$ ,  $(0 \leq x \leq 2)$  与  $x$  轴所围成图形的面积可表示为( )  
(A)  $-\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$  (B)  $\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$   
(C)  $\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$  (D)  $-\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$
- 设  $f'(\ln x) = 1 + x$ ，则  $f(x) =$  ( )  
(A)  $x + e^x + C$  (B)  $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$  (C)  $\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$  (D)  $e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

### 二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{e^x - 1} \right) =$  \_\_\_\_\_
- 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ ，当  $k =$  \_\_\_\_\_ 时， $f(x)$  连续
- 等边双曲线  $xy = 1$  在点  $(1, 1)$  处的曲率为 \_\_\_\_\_

4. 已知  $f(x)$  的一个原函数是  $\sin 2x$ , 则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(2x) dx =$  \_\_\_\_\_

5. 设  $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_

6. 积分  $\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt =$  \_\_\_\_\_

三、解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分，应写出演算过程及文字说明）

1. 求不定积分  $\int x e^x dx$

2. 计算定积分  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$

3. 求曲线  $y = x \ln y$  在点  $\left(\frac{e^2}{2}, e^2\right)$  处的切线方程和法线方程

4. 求微分方程  $y'' + y = e^x + \cos x$  的通解

四、综合题（第 1、2 题分别为 9 分，第 3、4 题分别为 5 分，满分为 28 分）

1. 设  $y = ax^2 + bx + c$  过原点，当  $0 \leq x \leq 1$  时  $y \geq 0$ ，又与  $x$  轴及  $x=1$  所围成图形的面积为  $\frac{1}{3}$ ，试确定  $a, b, c$  的值，使此图形绕  $x$  轴旋转一周的体积最小

2. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ ，求  $f(x)$  的间断点，并说明间断点的类型

3. 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续，在  $(0, a)$  内可导，且  $f(a) = 0$ ，证明存在一点  $\xi \in (0, a)$ ，使  $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$ 。

4. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，且  $f(x) > 0$ ， $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$ ， $x \in [a, b]$  证明：

(1)  $F'(x) \geq 2$  (2) 方程  $F(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  有且仅有一根。

## 6 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 6 小题，共 24 分）

1、函数  $y = \int_0^{x^2} (t-1)e^t dt$  有极大值点（ ）

- (A)  $x=1$  (B)  $x=-1$  (C)  $x=\pm 1$  (D)  $x=0$

2、设  $f(x) = 3x^2 + x|x|$ ，使  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶数  $n$  为（ ）

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3、已知函数  $f(x)$  的一个原函数是  $\sin 2x$ ，则  $\int 2xf'(x)dx =$ （ ）

- (A)  $2x \cos 2x - \sin 2x + C$  (B)  $2x \sin 2x - \cos 2x + C$   
(C)  $2x \sin 2x + \cos 2x + C$  (D)  $2x \cos 2x + \sin 2x + C$

4、设函数  $f(x)$  具有连续的导数，则以下等式中错误的是（ ）

- (A)  $\frac{d}{dx} \left( \int_a^b f(x) dx \right) = f(x)$  (B)  $d \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x) dx$   
(C)  $d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$  (D)  $\int f'(t) dt = f(t) + C$

5、反常积分  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ （ ）

- (A) 发散 (B) 收敛于 1 (C) 收敛于 1/2 (D) 收敛于 -1/2

6、微分方程  $y''' = \sin x$  的通解是（ ）

- (A)  $y = \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$  (B)  $y = \cos x + C$   
(C)  $y = \sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$  (D)  $y = 2 \sin 2x$

二、填空题（每小题 4 分，共 6 小题，共 24 分）

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) =$ \_\_\_\_\_。

2、曲线  $y = x \ln x$  上在点\_\_\_\_\_处的切线与直线  $x - y + 1 = 0$  平行。

3、曲线  $y = \frac{x^2}{3x+1}$  的斜渐近线方程\_\_\_\_\_。

4、求由  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  所确定的隐函数对  $x$  的导数  $\frac{dy}{dx} =$ \_\_\_\_\_。

5、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot (\sin x + 1) dx =$ \_\_\_\_\_。

6、已知  $y=1, y=x, y=x^2$  是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_。

三、计算题（每题 5 分，共 30 分，写出必要的演算推理过程才能得分）

1、计算极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$ .

2、已知函数  $y = x^{\sin x} (x > 0)$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ .

3、计算不定积分  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ .

4、计算定积分  $\int_1^e \frac{1}{x(2 + \ln^2 x)} dx$ .

5、计算星形线  $x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$  的全长。

6、求微分方程  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + 2x$  的通解。



有志者事竟成，破釜沉舟，百二秦关终属楚；苦心人天不负，卧薪尝胆，三千越甲可吞吴。 ——蒲松龄

四、综合题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分，写出必要的演算推理过程才能得分）

1、求曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 24x - 19$  在拐点处的切线方程与法线方程。

2、设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过点  $(0,0)$ ，且当  $x \in [0,1]$  时， $y \geq 0$ . 试确定  $a, b, c$  的值，使得抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $x = 1, y = 0$  所围图形的面积为  $4/9$ ，且使该图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积最小。

有志者事竟成，破釜沉舟，百二秦关终属楚；苦心人天不负，卧薪尝胆，三千越甲可吞吴。 ——蒲松龄

五、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1、设  $f''(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，试用分部积分法证明：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

2、设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，在  $(0,1)$  内可导，且  $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ，试证明至少

存在一点  $\xi \in (0,1)$ ，使得  $f'(\xi)=1$ 。

## 7 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（单选，每小题 4 分，共 6 小题，共 24 分）

- 函数  $y = \int_0^{x^2} (t-1)e^t dt$  有极大值点（ ）  
 (A)  $x=1$  (B)  $x=-1$  (C)  $x=\pm 1$  (D)  $x=0$
- 设  $f(x) = 3x^2 + x|x|$ ，使  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶数  $n$  为（ ）  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 已知函数  $f(x)$  的一个原函数是  $\sin 2x$ ，则  $\int 2xf(x)dx =$ （ ）  
 (A)  $2x \cos 2x - \sin 2x + C$  (B)  $2x \sin 2x - \cos 2x + C$   
 (C)  $2x \sin 2x + \cos 2x + C$  (D)  $2x \cos 2x + \sin 2x + C$
- 设函数  $f(x)$  具有连续的导数，则以下等式中错误的是（ ）  
 (A)  $\frac{d}{dx} \left( \int_a^b f(x) dx \right) = f(x)$  (B)  $d \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x) dx$   
 (C)  $d \left( \int f(x) dx \right) = f(x) dx$  (D)  $\int f'(t) dt = f(t) + C$
- 反常积分  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ （ ）  
 (A) 发散 (B) 收敛于 1 (C) 收敛于 1/2 (D) 收敛于 -1/2
- 微分方程  $y''' = \sin x$  的通解是（ ）  
 (A)  $y = \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$  (B)  $y = \cos x + C$   
 (C)  $y = \sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$  (D)  $y = 2 \sin 2x$

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) =$ \_\_\_\_\_。
- 曲线  $y = x \ln x$  上在点\_\_\_\_\_处的切线与直线  $x - y + 1 = 0$  平行。
- 曲线  $y = \frac{x^2}{3x+1}$  的斜渐近线方程\_\_\_\_\_。
- 求由  $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$  所确定的隐函数对  $x$  的导数  $\frac{dy}{dx} =$ \_\_\_\_\_。
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot (\sin x + 1) dx =$ \_\_\_\_\_。
- 已知  $y=1, y=x, y=x^2$  是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为\_\_\_\_\_。

三 计算题（每题 5 分，共 30 分，写出必要的演算推理过程才能得分）

1 计算极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$ .

2 已知函数  $y = x^{\sin x} (x > 0)$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ .

3 计算不定积分  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ .

4 计算定积分  $\int_1^e \frac{1}{x(2 + \ln^2 x)} dx$ .

5 计算星形线  $x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$  的全长。

6 求微分方程  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + 2x$  的通解。

四 综合题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分，写出必要的演算推理过程才能得分）

1 求曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 24x - 19$  在拐点处的切线方程与法线方程。

2 设抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过点  $(0,0)$ ，且当  $x \in [0,1]$  时， $y \geq 0$ . 试确定  $a, b, c$  的值，使得抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与直线  $x = 1, y = 0$  所围图形的面积为  $4/9$ ，且使该图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积最小。

五 证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1 设  $f''(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，试用分部积分法证明：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

2 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续，在  $(0,1)$  内可导，且  $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ，试证明至少存在一点  $\xi \in (0,1)$ ，使得  $f'(\xi)=1$ 。

## 8 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题每小题 4 分，共 6 小题，共计 24 分，除标注外为单选题）

1 设  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内可导，且  $f(x) > g(x)$ ，则必有（ ）（多选）

A  $f(-x) > g(-x)$

B  $f'(x) > g'(x)$

C  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

D  $\int_0^x f(t)dt > \int_0^x g(t)dt$

2 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有定义，在开区间  $(a, b)$  内可导，则（ ）

A 对任何  $\xi \in (a, b)$ ，有  $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$

B 当  $f(a) \cdot f(b) < 0$  时，存在  $\xi \in (a, b)$ ，使  $f(\xi) = 0$

C 当  $f(a) = f(b)$  时，存在  $\xi \in (a, b)$ ，使  $f'(\xi) = 0$

D 存在  $\xi \in (a, b)$ ，使  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

3 设  $f(x)$  连续，则在下列变上限积分定义的函数中，必为偶函数的是（ ）

A  $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$

B  $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$

C  $\int_0^x f(t^2)dt$

D  $\int_0^x [f(t)]^2 dt$

4 设  $f(x)$  可导，且  $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ ，则当  $\Delta x \rightarrow 0$  时， $f(x)$  在  $x_0$  点处的微分  $dy$  是（ ）

A 与  $\Delta x$  等价的无穷小

B 与  $\Delta x$  同阶的无穷小

C 比  $\Delta x$  低阶的无穷小

D 比  $\Delta x$  高阶的无穷小

5 曲线  $y = e^{-x}\sin x (0 \leq x \leq 3\pi)$  与  $x$  轴所围成的面积可表示为（ ）

A  $-\int_0^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$

B  $\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin x dx - \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$

C  $\int_0^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$

D  $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x}\sin x dx$

6 设非齐次线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  有两个不同的解  $y_1(x), y_2(x)$ ， $C$  为任意常数，则方程的通解是（ ）

A  $C[y_1(x) - y_2(x)]$

B  $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$

C  $C[y_1(x) + y_2(x)]$

D  $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

二 填空题（本题每小题 4 分，共 6 小题，共计 24 分）

1 已知  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ，则  $y'' =$  \_\_\_\_\_

2 微分方程  $xy' + y = 0$  满足初始条件  $y(1) = 2$  的特解是 \_\_\_\_\_

古之立大事者，不惟有超世之才，亦必有坚忍不拔之志。——苏轼《晁错论》

3 设  $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ -1 & (x > \frac{1}{2}) \end{cases}$ , 则  $\int_1^2 f(x^{-1})dx =$  \_\_\_\_\_

4 若曲线  $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$  有拐点  $(-1, 0)$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$

5 广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$  \_\_\_\_\_

6 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为

三 计算题（每题 5 分，共 6 题，共计 30 分）

1 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^3}$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2}$$

3 求曲线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  (其中  $a > 0$ , 且为常数) 在  $t = \frac{\pi}{2}$  处的切线方程。

4 计算积分  $\int_0^1 x e^{-x} dx$

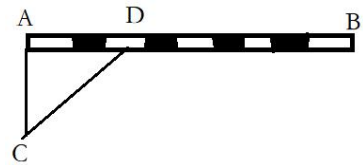
5 求曲线  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$  (其中  $a > 0$ , 且为常数) 相应于  $0 \leq t \leq \pi$  的一段弧的长度。



6 求微分方程  $\frac{dx}{dy} + 2xy = 4x$  的通解。

四 数学建模题。（本题 6 分）

铁路线 AB 之间的距离为 100km，工厂 C 距 A 处为 20km，AC 垂直于 AB（如下图所示），为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3: 5，为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处？



五 解答题（本题 8 分）

设曲线 $y = ax^2 (x \geq 0, \text{且} a > 0)$ 与曲线 $y = 1 - x^2$ 交于点  $A$ . 过原点  $O$  和点  $A$  的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形  $D$ , 求

(1)  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$ ;

(2) 求  $a$  的值, 使得 $V(a)$ 最大。

六 证明题。（每题 4 分，共 2 题，共计 8 分）

1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且  $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx$ , 证明 $\exists \xi \in (0,2), \text{s.t. } f(\xi) = f(0)$

2 设 $f(x)$ 是连续函数, 证明 $\int_0^x (\int_0^u f(t)dt)du = \int_0^x f(t)(x-t)dt$

## 9 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 若  $f(x)$  的导函数为  $\sin x$ ，则  $f(x)$  的一个原函数是（ ）

- (A)  $1 + \sin x$  (B)  $1 - \sin x$  (C)  $1 + \cos x$  (D)  $1 - \cos x$

2 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处存在左、右导数，则  $f(x)$  在  $x_0$  点（ ）

- (A) 可导 (B) 不可导 (C) 连续 (D) 不连续

3 设周期函数  $f(x)$  在实数集  $\mathbf{R}$  内可导，周期为 4，又  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ ，则曲线

$y = f(x)$  在点  $(5, f(5))$  处切线斜率为（ ）

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B) 0 (C) -1 (D) -2

4 下列各式正确的是（ ）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{x - 1} = 2, (2) \lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} = 1, (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1, (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- (A) (2) (B) (1) (C) (1) (3) (D) (1) (2) (3)

5 对反常积分  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ ，下列结论正确的是（ ）

- (A)  $p = 1$  时该反常积分收敛 (B)  $p > 1$  时该反常积分收敛  
(C)  $p \leq 1$  时该反常积分发散 (D)  $p < 1$  时该反常积分收敛

6 微分方程  $y'' + 2y' - 3y = e^x \sin x$  的一个特解应具有形式（ ）

- (A)  $ae^x \sin x$  (B)  $axe^x \sin x$  (C)  $xe^x(a \sin x + b \cos x)$  (D)  $e^x(a \sin x + b \cos x)$

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 在抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  上曲率最大的点为\_\_\_\_\_。

2 假设函数  $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  点可导，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3 设  $y = x^2 + 6x - 4$ ，那么在区间  $(-\infty, -3)$ 、 $(0, +\infty)$  内，函数分别是单调\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_（填增加或减少）

4 设  $y = 3e^x \cos x$ ，则函数的微分  $dy =$ \_\_\_\_\_。

5 定积分  $\int_{-1}^1 (x^2 + x\sqrt{1-x^2}) dx =$ \_\_\_\_\_。

6 已知  $F(x)$  是  $\cos x$  的一个原函数， $F(0) = 0$ ，则  $\int xF(x) dx =$ \_\_\_\_\_。

三 解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right]$

2 求不定积分  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

3 设函数  $y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$  确定，求使得曲线  $y = y(x)$  向上凸的  $x$  取值范围

4 若函数  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ ，求定积分  $\int_0^2 f(x) dx$ 。

四 求函数  $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$  的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出草图。（本题 9 分）

五 综合题（本题满分 11 分，第一题 5 分，第二题 6 分）

1 设光滑曲线  $y = \varphi(x)$  过原点，且当  $x > 0$  时  $\varphi(x) > 0$ ，对应于  $[0, x]$  一段曲线的弧长为  $e^x - 1$ ，求  $\varphi(x)$ 。

- 2 设  $y = ax^2 + bx + c$  过原点，当  $0 \leq x \leq 1$  时  $y \geq 0$ ，又与  $x$  轴及  $x = 1$  所围成图形的面积为  $\frac{1}{3}$ ，试确定  $a, b, c$  的值，使此图形绕  $x$  轴旋转一周的体积最小。

六 证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

- 1 证明  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ ，并由此计算该积分值。

- 2 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续，且  $f(x) > 0$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$ ,  $x \in [a, b]$ ，证明：（1）

$F'(x) \geq 2$ ；（2）方程  $F(x) = 0$  在区间  $(a, b)$  内有且仅有一个根。

## 10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

### 一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$ ,  $g(x) = \sin x - x$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时, 成立 ( )  
 A.  $f(x)$  与  $g(x)$  是等价无穷小  
 B.  $f(x)$  是比  $g(x)$  高阶的无穷小  
 C.  $f(x)$  与  $g(x)$  是同阶无穷小  
 D.  $g(x)$  是比  $f(x)$  高阶的无穷小
2. 若  $f(x)$  是奇函数且  $f'(0)$  存在, 则  $x=0$  是函数  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$  的 ( )  
 A. 可去间断点  
 B. 无穷间断点  
 C. 连续点  
 D. 振荡间断点
3. 设  $f(x)$  是方程  $y'' + 2y' + 4y = 0$  的一个特解, 如果  $f(x_0) < 0$ , 且  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处 ( )  
 A. 取极大值  
 B. 取极小值  
 C. 某领域内单调增  
 D. 某领域内单调减
4. 设积分族  $y = \int f(x) dx$  中有倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线, 则  $y = f(x)$  的图形是 ( )  
 A. 平行于  $y$  轴的直线  
 B. 抛物线  
 C. 平行于  $x$  轴的直线  
 D. 直线  $y=x$
5. 对反常积分  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ , 下列结论正确的是 ( )  
 A.  $p=1$  时该反常积分收敛  
 B.  $p \geq 1$  时该反常积分发散  
 C.  $p > 1$  时该反常积分收敛  
 D.  $p < 1$  时该反常积分收敛
6. 平面曲线  $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ ,  $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  的弧长为 ( )  
 A.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos x} dx$   
 B.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx$   
 C.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\cos x}} dx$   
 D.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\cos x}} dx$

### 二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 若  $f(x) = \begin{cases} b(1 + \sin x) + a + 2, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处可导, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$   $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

2. 已知  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ , 则  $\frac{d^2x}{dy^2} =$  \_\_\_\_\_;

3.  $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2}) dx =$  \_\_\_\_\_;

4. 函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  的单调递增区间是 \_\_\_\_\_;

5.  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx =$  \_\_\_\_\_;

6. 一阶线性微分方程  $xy' + y = \sin x$  的通解为 \_\_\_\_\_.

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$ .

2. 设曲线方程  $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ , 求曲线在  $t = 0$  对应点处的切线方程.

3. 求不定积分  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$



4. 计算定积分  $\int_{-2}^2 (x+|x|)e^{|x|} dx$

5. 求微分方程  $y'' + y = e^x + \cos x$  的通解

#### 四、综合题（本题满分 8 分）

设曲线方程为  $y = e^{-x} (x \geq 0)$  (1) 把曲线  $y = e^{-x}$ ,  $x$  轴,  $y$  轴和直线  $x = c (c > 0)$  所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周得旋转体, 求此旋转体的体积  $V(c)$ , 并求满足  $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow +\infty} V(c)$  的  $a$ . (2) 在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积。

五、数学建模题（本题满分 7 分）

一个煮熟了的鸡蛋有  $98^{\circ}\text{C}$ ，把它放在  $18^{\circ}\text{C}$  的水池里，5 分钟后，鸡蛋的温度是  $38^{\circ}\text{C}$ 。大约还需要几分钟鸡蛋到达  $20^{\circ}\text{C}$ ？（假定物体冷却满足牛顿冷却定律：物体温度的变化率与物体温度和当时环境温度之差成正比，已知  $\ln 2 \approx 0.7, \ln 5 \approx 1.6$ ）

六、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，满分 7 分）

1 证明  $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$ ，并利用结论求  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$

2 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，且  $f''(x) > 0$ ，证明： $f(x) \geq x$



## 高等数学试题资料目录

- 1 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）
- 2 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 3 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 4 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 5 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）**
- 6 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 7 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 8 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 9 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）
- 10 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 11 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 12 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 13 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）
- 14 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 15 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 16 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 17 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 18 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）
- 19 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 20 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）
- 21 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 22 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）
- 23 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 24 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）