2006 ~2007 学年第一学期《高等数学 A》期末考试试卷（B 卷）

题号	一	二	三					四	五	六	总分	复核教师签名
			1	2	3	4	5					
得分												
阅卷教师签名												

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．设当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x), \beta(x)$ 都是无穷小($\beta(x) \neq 0$)，则当 $x \to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是（　　）

(A) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\sin\dfrac{1}{x}$　　(C) $\ln(1+\alpha(x)\beta(x))$　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

2．设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在

3．函数 $y=\ln(x+1)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 ξ 为（　　）

(A) $\ln 2$　　(B) $\dfrac{1}{\ln 2}$　　(C) $\dfrac{1}{\ln 2}-1$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

4．设 $\int f(x)dx=F\left(x\right)+C$，且 $x=at+b$，则 $\int f\left(t\right)dt=$（　　）

(A) $F(x)+C$　　(B) $\dfrac{1}{a}F(at+b)+C$

(C) $F\left(t\right)+C$　　(D) $F\left(at+b\right)+C$

5. 设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)dx$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（　　）

(A) $S_1< S_2< S_3$　　(B) $S_2< S_1< S_3$　　(C) $S_3< S_1< S_2$　　(D) $S_2< S_3< S_1$

6．设 $\vec{a}=\{3,1,2\},\vec{b}=\{2,3,-1\}$，又 $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b},\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}$，则 $\left(\vec{c},\hat{\ }\vec{d}\right)=$（　　）

(A) 0　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1．已知 $f\left(x\right)=e^{x^2}$，$f\left[\phi\left(x\right)\right]=1-x$，且 $\phi\left(x\right)\geq 0$，则 $\phi\left(x\right)$ 的定义域为____________

2．设 $y=x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\cdots\left(x+n\right)$，则 $f'\left(0\right)=$ __________

3．设函数 $y=\int_0^{x^2}(t-1)e^{t^2}dt$，其极大值点是____________

4．设 $\int \frac{f'\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=e^x+C$，则 $f\left(x\right)=$______________

5．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan x^3\cdot\left(\sin^2 2x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=$____________

6．曲线 $y=x\left(x-1\right)\left(2-x\right)$ 与 x 轴所围图形面积可表为定积分_________________________

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\ln(1+t)dt-x^3}{e^{x^2}(x-\sin x)}$

2. $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=t+e^{ty} \end{cases}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

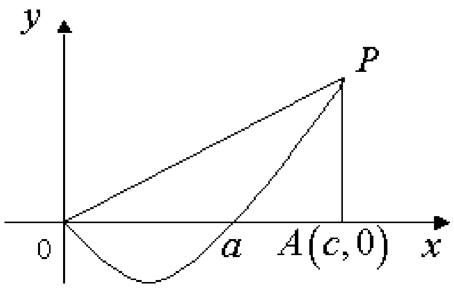
3．$\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

4. $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

5. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx$，求$a$的值

四、 设函数$f(x)$连续, $\varphi(x)=\int\limits_0^1 f(xt)dt$, 且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$为常数), 求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性。（本题8分）

五、曲线 $y=x\left(x-a\right)$ 在 $\left[0,c\right]\left(0<a<c\right)$ 上的一段弧 OP 与直线 PA 及 x 轴围成的图形（如图所示）绕 x 轴旋转。问 c 取何值时，旋转体的体积等于 ΔOPA 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积。（本题 8 分）



六、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, 0<f'(x)\le 1$，证明：$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$（本题 6 分）

2006 ~2007 学年第一学期《高等数学 A》期末考试试卷（B 卷）参考答案

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.A (4 分) 2.B (4 分) 3.C (4 分) 4.C (4 分) 5.B (4 分) 6.C (4 分)

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $x\le 0$ (4 分) 2. $n!$(4 分) 3. $x=0$ (4 分) 4. $\frac{e^{x^2}}{2}+C$ (4 分) 5. 0 (4 分) 6. $\int_1^2 ydx-\int_0^1 ydx$ (4 分)

三、计算题（共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\ln(1+t)dt-x^3}{x-\sin x}$ -------------1 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+x)-3x^2}{1-\cos x}$$ -------------3 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln(1+x)}{1-\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$$ ------------------4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2/2}-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2/2}=-4$$ ------------------6 分

2. 解：利用参数方程求导公式：$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}$ -----------------1 分

由第一个方程易得：$x_t'=\frac{1}{1+t^2}$ -----------------3 分

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $y_t'=1+e^{ty}\left(y+ty_t'\right)\Rightarrow y_t'=\frac{1+ye^{ty}}{1-te^{ty}}$ ----------------5 分

故 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{1+ye^{ty}}{1-te^{ty}}\cdot\left(1+t^2\right)\right|_{t=0}=2$ -------------------6 分

3. 解：原式$=\int\frac{\sec^4 x}{\tan x}dx$ -----------------2 分

$$=\int\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}d\tan x$$ -----------------4 分

$$=\ln\left|\tan x\right|+\frac{\tan^2 x}{2}+C$$ -----------------6 分

4．解：原式$=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ -----------------1 分

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$$ -----------------3 分

$$=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx.$$ -----------------5 分

$$=4\int_0^1 dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=4-\pi$$ -----------------6 分

5．解：左$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{-2a}{x+a}\right)\right]^{\frac{x+a}{-2a}\cdot\frac{-2ax}{x+a}}=e^{-2a}$ -----------------2 分

右$=\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx=-\int_a^{+\infty}xde^{-2x}=-xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx=ae^{-2a}-\dfrac{e^{-2x}}{2}\Big|_a^{+\infty}=\dfrac{3a}{2}e^{-2a}$ -----------------5 分

$\therefore a=\dfrac{2}{3}$ -----------------6 分

四、解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow\varphi(0)=0$ -----------------1 分

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\overset{xt=u}{=}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$ -----------------3 分

$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad x\neq0$ -----------------4 分

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$ -----------------7 分

$$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore\varphi'(x)$在$x=0$处连续。 -----------------8 分

五、解：$V_{\Delta OPA}=\dfrac{1}{3}\pi\left[c(c-a)\right]^2\cdot c=\dfrac{c^3(c-a)^2\pi}{3}$ -----------------2 分

记弧OP与直线PA及x轴围成的图形绕x轴旋转的旋转体体积为V

则$V=\int_0^c\pi\left(x(x-a)\right)^2dx$ -----------------5 分

$=\pi\left(\dfrac{c^5}{5}-\dfrac{ac^4}{2}+\dfrac{a^2c^3}{3}\right)$ -----------------6 分

$\dfrac{c^3(c-a)^2\pi}{3}=\pi\left(\dfrac{c^5}{5}-\dfrac{ac^4}{2}+\dfrac{a^2c^3}{3}\right)\Rightarrow c=\dfrac{5}{4}a$ -----------------8 分

六、证明：令$F(x)=(\int_0^x f(t)dt)^2-\int_0^x f^3(t)dt,\ 0\le x\le1,$ -----------------2 分

则$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)].$

记$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$，$0\le x\le1.$

$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)],$ -----------------4 分

因为 $f(0)=0, 0<f'(x)\le 1$，所以当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)\ge 0$，$1-f'(x)\ge 0$， $G'(x)\ge 0$，又 $G(0)=0$，故 $G(x)\ge 0$, 从而 $F'(x)\ge 0$，又 $F(0)=0$，故当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)\ge 0$，也有 $F(1)\ge 0$，即 $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx.$ -----------------6 分