离散数学概论

第一章 命题逻辑

课程QQ号： 923679801
金耀 数字媒体技术系
fool1025@163.com
13857104418

第一章 命题逻辑

本讲主要内容

- 基本概念
- 命题符号化
- 真值表
- 命题公式分类

一、基本概念

命题：判断结果唯一的陈述句.

- $2+5=7$;
- 我是中国人。

真命题：真值为真的命题。

假命题：真值为假的命题。

注意：　感叹句、祈使句、疑问句都不是命题
陈述句中的悖论以及判断结果不唯一确定的也不是命题

例 下列句子中那些是命题?

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.	真命题
(2) $2+5=8$.	假命题
(3) $x+5>3$.	真值不确定
(4) 你有铅笔吗?	疑问句
(5) 这只兔子跑得真快呀!	感叹句
(6) 请不要讲话!	祈使句
(7) 我正在说谎话.	悖论

(3)~(7)都不是命题

1. 命题的分类

- 简单命题（原子命题）：简单陈述句构成的命题.
- 复合命题：由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题.

2. 命题符号化 –简单命题

符号化：用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i\ (i \geq 1)$ 表示.

简单命题

q： 北京是中国首都， 则 **q** 的真值为 1.

p： $\pi = 3.14$， 则 **p** 的真值为 0.

祖冲之： 刘徽“割圆术”

介于： 3.1415926~ 3.1415927

2. 命题符号化 –简单命题

符号化：用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i\ (i \geq 1)$ 表示.

简单命题

q：$1+2+3+\ldots+98+99+100=5050$　真命题or假命题

数学家高斯—— 数学家之王

与阿基米德、牛顿齐名

❖否定式与否定联结词“¬”：

定义:设p为命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的**否定式**，记作$\neg p$. 符号$\neg$称作**否定联结词**，并规定p为真当且仅当p为假.

❖合取式与合取联结词“$\wedge$”:

定义:设p, q为二命题,复合命题“p并且q”(或“p与q”)称p与q的**合取式**,记作$p\wedge q$. $\wedge$称作**合取联结词**,并规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

例 将下列命题符号化

(1) 王晓既用功又聪明.

(2) 王晓不仅聪明，而且用功.

(3) 王晓虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p：王晓聪明，q：王晓用功，则

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $p \wedge \neg q$.

例 (续)

令 r：张辉是三好学生，s：王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 t：张辉与王丽是同学，t 是简单命题 .

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中 “与” 联结的是两个名词，整个句子是一个简单命题.

❖析取式与析取联结词“$\vee$”：

定义：设p, q为二命题，复合命题“p或q”称作p与q的**析取式**，记作$p\vee q$．$\vee$称作**析取联结词**，并规定$p\vee q$为假当且仅当p与q同时为假．

2.命题符号化 –联结词与复合命题

(1) 2或4是素数.

解 令 p:2是素数, q:4是素数

符号化为: $p \vee q$

它们的真值分别为 0.

则为**相容或**.

(2) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

解: 令 t:小元元拿一个苹果,

u:小元元拿一个梨,

则符号化为 :$(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

为**排斥或**.

(3) 王晓红生于1975年或1976年

令v :王晓红生于1975年,w:王晓红生于1976年,

则既可符号化为: $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$, 又可符号化为 $v \vee w$.

❖蕴涵式与蕴涵联结词“→”：

定义：设 p,q为二命题，复合命题“如果p,则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p\to q$，并称p是蕴涵式的**前件**，q为蕴涵式的**后件**.→称作**蕴涵联结词**，并规定，$p\to q$为假当且仅当p为真q为假.

联结词与复合命题(续)

$p \to q$ 的逻辑关系：q 为 p 的**必要条件**， p为 q的**充分条件**

"如果 p， 则 q "的不同表述法很多：

* 若p， 就q
* 只要p， 就q
* p 仅当q
* 只有q 才p
* 除非q, 才p 或 除非q, 否则非p.

当 p 为假时， $p \to q$ 为真

常出现的错误：不分充分与必要条件

“只要就”与“只有才”的区别

- 只要...就，是充分条件（条件不唯一）。

  例:只要做了课后习题，就能得高分。

- 只有...才，是必要条件（条件唯一）。

  例:只有做了课后习题，才能得高分。

2.命题符号化 –联结词与复合命题

例 设p:天冷，q:小王穿羽绒服，s:肯努力，t:小王就取得好成绩，将下列命题符号化

(1) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \to q$

(2) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $p \to q$

(3) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \to p$

(4)只要肯努力，小王就能取得好成绩. $s \to t$

注意： $\underline{p \to q}$ 与 $\underline{\neg q \to \neg p}$ 等值（真值相同）

联结词与复合命题（续）

例 设 p:天冷， q:小王穿羽绒服，

将下列命题符号化

(1) 只要天冷， 小王就穿羽绒服. $p \rightarrow q$

(2) 只有天冷， 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

(3) 除非天冷， 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

(4) 除非小王穿羽绒服， 否则天不冷. $p \rightarrow q$

(5) 如果天不冷， 则小王不穿羽绒服. $q \rightarrow p$

(6) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. $q \rightarrow p$

❖等价式与等价联结词“$\leftrightarrow$”：

定义：设p，q为二命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$称作等价联结词.并规定$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假.

说明：

(1) $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系:p与q互为充分必要条件

(2) $p \leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同真或同假

例

例 求下列复合命题的真值

(1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$. 1

(2) $2+2=4$ 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) $2+2=4$ 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) $2+2=4$ 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在x_0 可导的充要条件是它在 x_0连续. 0

联结词与复合命题(续)

以上给出了5个联结词：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, 组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

联结词的优先顺序为：$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$; 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算; 若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

注意: 本书中使用的 括号全为圆括号.

命题变项与合式公式

命题常项：简单命题

命题变项：真值不确定的陈述句

定义 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p,q,r,\ldots,p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$ 是合式公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

说明：外层括号可以省去

合式公式的层次

定义

(1) 若公式A是单个的命题变项, 则称A为0层公式.

(2) 称A是$n+1(n\geq 0)$层公式是指下面情况之一:

(a) $A=\neg B$, B是n层公式;

(b) $A=B\wedge C$, 其中B,C分别为i层和j层公式, 且 $n=\max(i, j)$;

(c) $A=B\vee C$, 其中B,C的层次及n同(b);

(d) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(b);

(e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(b).

合式公式的层次 (续)

例如 公式

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \rightarrow q$	2层
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

公式的赋值

定义 给公式A中的命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$指定一组真值称为对A的一个**赋值**或**解释**

成真赋值: 使公式为真的赋值

成假赋值: 使公式为假的赋值

说明：

赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$之间不加标点符号，$\alpha_i=0$或$1$.

A中仅出现$p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指

$p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$

A中仅出现$p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指$p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3\ldots$

含n个变项的公式有2^n个赋值.

3.真值表

真值表：公式A在所有赋值下的取值情况列成的表.

例 给出 $A=(q\to p)\wedge q\to p$ 的真值表

$p\quad q$	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

3.真值表

例 $C=(p\vee q)\to\neg r$ 的真值表

p q r	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\to\neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

课堂讨论- 求$B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

4.命题公式分类

定义 设A为一个命题公式

(1) 若A无成假赋值，则称A为**重言式**(也称**永真式**)

(2) 若A无成真赋值，则称A为**矛盾式**(也称**永假式**)

(3) 若A不是矛盾式，则称A为**可满足式**

注意：重言式是可满足式，但反之不真.

上例中A为重言式，B为矛盾式，C为可满足式

$A = (q \to p) \wedge q \to p$，$B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$，$C = (p \vee q) \to \neg r$

思考

命题常元、命题变元、连接词、命题公式等概念的定义是否与我们学过的某些知识有相似之处？

课后作业

课后习题：1、3、5、7

答题派作业：

一、简答题

1. 1.1 判断下列语句是否为命题，若是命题请指出是简单命题还是复合命题。（45）

（1）$\sqrt{2}$是无理数。

（2）5能被2整除。

（3）现在开会吗？

（4）$x+5>0$。

（5）这朵花真好看呀！

（6）2是素数当且仅当三角形有3条边。

（7）雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起。

（8）2080年10月1日天气晴好。

（9）太阳系以外的星球上有生物。

（10）小李在宿舍里。

（11）全体起立！

（12）4是2的倍数或是3的倍数。

（13）4是偶数且是奇数。

（14）李明与王华是同学。

（15）黄色和蓝色可以调配成绿色。

2. 1.3 判断下列各命题的真值。（25）

（1）若$2+2=4$,则$3+3=6$。

（2）若$2+2=4$,则$3+3\neq6$。

（3）若$2+2\neq4$,则$3+3=6$。

（4）若$2+2\neq4$,则$3+3\neq6$。

（5）$2+2=4$当且仅当$3+3=6$。

（6）$2+2=4$当且仅当$3+3\neq6$。

（7）$2+2\neq4$当且仅当$3+3=6$。

（8）$2+2\neq4$当且仅当$3+3\neq6$。

3. 将下列命题符号化，并给出真值。（30）

1）如果$2<1$，则$3\geq2$.

2) 只有$2<1$，才有$3\geq2$.

3）除非 $2<1$，才有$3\geq2$.

4）除非 $2<1$，否则 $3<2$.

5) $2<1$，仅当 $3<2$.

6）若 $2+2\neq4$,则$3+3\neq6$；反之亦然.