浙江理工大学 2023/2024 学年第一学期
《高等数学 A1》期末试卷（A）参考答案

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1.D　　2.A　　3.B　　4.A　　5.C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1．$a=\mathbf{0}$，$b=\mathbf{-3}$

2．$dy=\dfrac{3x^2}{e^y+1}dx$ ．

3．$\dfrac{\pi}{2}$

4．$y=e^{-x}\sin x$ ．

5．$\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$．

三、解答下列各题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1．解：$\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{x^2}]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^2\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}$　　**--3 分**

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\dfrac{2x}{1+x^2}}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$　　**--3 分**

2．解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t}{2}$（3 分）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1+t^2}{4t}$（3 分）

3．**解：** 由于 $f'(x)=(2-x)\mathrm{e}^{-x}$，$f''(x)=(x-3)\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x)=0\Rightarrow x=3$

$(-\infty,\ 3]$ 凸区间，$[3,\ +\infty)$ 凹区间；4 分

且 $f(3)=\int_0^3(2-t)\mathrm{e}^{-t}dt=(t-1)\mathrm{e}^{-t}\big|_0^3=1+2\mathrm{e}^{-3}$，

拐点为 $(3,1+2\mathrm{e}^{-3})$．2 分

4. 解：

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}\,e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}[xe^{-2x}\,|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}\,x] \qquad \text{--4 分}$$

$$= -\frac{1}{2}[\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} - 0 + \frac{1}{2}e^{-2x}\,|_0^{+\infty}]$$

$$= -\frac{1}{2}[0 + \frac{1}{2}(\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} - 1)] = \frac{1}{4} \qquad \text{--2 分}$$

5. 解：

$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$$

$$= \int \frac{(2x-6)-2}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x^2-6x+10)}{\sqrt{x^2-6x+10}} - 2\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2+1}}dx \qquad \text{-- 4 分}$$

$$= 2\sqrt{x^2-6x+10} - 2\ln(x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}\;) + \mathrm{C} \qquad \text{-- 2 分}$$

四、（本题 7 分）

求 $\int_0^2 f(x-1)dx$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cdot\arctan x & x<0 \\ \dfrac{1}{1+x} & x\geq 0 \end{cases}$$

解：$\int_0^2 f(x-1)dx \overset{令 t=x-1}{=} \int_{-1}^1 f(t)dt$ -----------2 分

$$= \int_{-1}^0 2t\arctan t dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 \arctan t d(1+t^2) + \ln|1+t|_0^1$$

$$= [(1+t^2)\arctan t]\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^0 \frac{1+t^2}{1+t^2}\mathrm{d}\,t + \ln 2$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2 \qquad \text{---5 分}$$

五、 （本题 8 分）

设 $f(x)=e^{x}-\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\mathrm{d}t$， f 为二阶可导函数，试求 $f(x)$

解：将方程对 x 求导得：

$$f'(x)=e^{x}-[x\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x}tf(t)\mathrm{d}t]'=e^{x}-\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

再对 x 求导得 $f''(x)=e^{x}-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=e^{x}$，（**3 分**）

特征方程为 $r^{2}+1=0\Rightarrow$ 特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，对应齐次方程的通解

$C_{1}\cos x+C_{2}\sin x$，（**2 分**）

注意到 i 不是特征根，所以有特解 $y^{*}=ae^{x}$，将 y^{*} 代入原方程得， $a=\frac{1}{2},\ y^{*}=\frac{1}{2}e^{x}$

因为 $f(0)=1,f'(0)=1,$ 所以 $C_{1}=\frac{1}{2},C_{2}=\frac{1}{2},$ 即 $y=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$.（**3 分**）

六、 （本题 10 分）

设直线 $y=ax\ (0<a<2)$ 与抛物线 $y=x^{2}$ 围成平面图形面积为 S_{1}，它们与直线 $x=2$ 围成平面图形面积为 S_{2}.

（**1**）求 a 的值，使得 $S=S_{1}+S_{2}$ 最小，并求 S 的最小值；

（**2**）求 S 取得最小值时，直线 $y=ax\ (0<a<2)$，抛物线 $y=x^{2}$ 与直线 $x=2$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

解答：(1) 直线 $y=ax(0<a<2)$ 与抛物线 $y=x^{2}$ 交点为 $(0,0)$ 与 (a,a^{2})，

$$S(a)=S_{1}+S_{2}=\int_{0}^{a}(ax-x^{2})dx+\int_{a}^{2}(x^{2}-ax)dx=\frac{1}{3}a^{3}-2a+\frac{8}{3}\text{ --4 分}$$

$S'(a)=a^{2}-2$ ， $S'(a)=0\Rightarrow a=\sqrt{2}(-\sqrt{2}$舍掉$)$

$S''(\sqrt{2})=2\sqrt{2}>0$， $a=\sqrt{2}$ 是 $S=S_{1}+S_{2}$ 的最极小值点

且 $S_{\min}=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ ------3 分

（2）图形 S_{2} 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积

$$V_{x}=\int_{\sqrt{2}}^{2}\pi[(x^{4}-(\sqrt{2}x)^{2}]dx=\frac{8}{15}(2+\sqrt{2})\pi\text{ ------3 分}$$

七、 （本题 5 分）

设函数 $f\left(x\right)=\int_{1}^{x}\mathrm{e}^{t^{2}}\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^{2}}$.

证明：已知 $f\left(x\right)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，

法一：令 $F(x)=(x-2)f\left(x\right)=(x-2)\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，----2 分

则 $F(2)=F(1)=0$，$F'(x)=[(x-2)\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t]'=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+(x-2)\mathrm{e}^{x^2}$，由罗尔定理

知，存在 $\xi\in(1,2)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $\int_1^\xi \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+(\xi-2)\mathrm{e}^{\xi^2}=0$，从而

$f(\xi)=\int_1^\xi \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$；----3 分

法二：令 $F(x)=f\left(x\right)+(x-2)\mathrm{e}^{x^2}$，----2 分

则 $F(1)=-\mathrm{e}<0$，$F(2)=\int_1^2 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t>0$，由零点定理知，存在 $\xi\in(1,2)$，使 $F(\xi)=0$，

即 $F(\xi)=f\left(\xi\right)+(\xi-2)\mathrm{e}^{\xi^2}=0$，从而 $f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$ ----3 分