离散数学概论

第一章 命题逻辑

课程QQ号： **819392514**
金耀 数字媒体技术系
fool1025@163.com
13857104418

如何学好（离散）数学

- **多思考**：如概念、定义、定理、公式等用途是什么？与学过的知识有什么联系？其直观意义是什么？
- **多做题**：熟悉、巩固、内化数学知识。
- **多应用**：深化数学知识，训练数学思维，掌握数学方法。

“学习数学最好的方式就是使用它，使用它越多，你就觉得它越有用，越有趣，学得就越好，也越快，越扎实。”

知识点回顾

- 命题的定义（2个要点）
- 命题的分类（2大类）
- 命题的符号化（5个联结词）
- 命题公式的赋值（2种）与分类（3种）

常见问题

- 命题变项（p, q, r）是命题吗？
- 为什么命题前件为假，整个命题为真？
- 充分条件与必要条件（如果天晴，我就去打球。）

例：命题翻译

- 你可以在寝室使用网络，仅当你成绩达标或者你不是大一新生。

$$(p\rightarrow(q\vee \neg r)$$

- 如果你身高不足1米，那么你不能乘坐过山车，除非你已年满16周岁。

$$(p \wedge\neg r) \rightarrow\neg q \qquad q\rightarrow (\neg p \vee r)$$

第一章 命题逻辑

本讲主要内容

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算与置换规则
- 应用实例

命题公式与代数公式

- 常元与变元
- 赋值
- 运算符（优先级）
- 定义域与值域 （离散 v.s. 连续）
- 运算律 （等值律）

例：判断下列公式类型

$(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p \qquad \neg(\neg p\vee q)\wedge q$

运用真值表验证：

p q	$(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$	$\neg(\neg p\vee q)\wedge q$
0 0	1	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	1	0

1. 等值式

❖**定义** 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**.

❖**第一种方法：** 用真值表可验证两个公式是否等值.

请验证：$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

$p\rightarrow(q\rightarrow r)\nLeftrightarrow(p\rightarrow q)\rightarrow r$

关系符号与运算符号

- $\Leftrightarrow$是关系符号，表示两个命题公式之间的（等价）关系（具有自反性、对称性、传递性）；
- $\neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$等连接词是运算符号，其特点是具有运算结果。

2. 基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律：$A \vee A \Leftrightarrow A$，$A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律：$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$，$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律：$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律：$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

!(x>=a || y >= b) ⇔ (x<a && y < b)

德·摩根律: $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

吸收律: $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

零律: $A\vee 1\Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

同一律: $A\vee 0\Leftrightarrow A$, $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

排中律: $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

德·摩根 De Morgan

英国数学家

(1806-1871)

基本等值式(续)

<u>蕴涵等值式</u>: $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

假言易位: $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A,B,C代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

A B	$A \to B$	$\neg A \vee B$
0 0	1	1
0 1	1	1
1 0	0	0
1 1	1	1

$$
\begin{aligned}
A \to B &\Leftrightarrow \neg A \vee B \\
&\Leftrightarrow B \vee \neg A \\
&\Leftrightarrow \neg B \to \neg A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \\
\Leftrightarrow &(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \\
\Leftrightarrow &(\neg A \wedge (B \vee \neg B) \\
\Leftrightarrow &\neg A \wedge 1 \\
\Leftrightarrow &\neg A
\end{aligned}
$$

3. 等值演算与置换规则

等值演算：

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则： 若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的基础：

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

代入规则

❖ 设A是重言式，对其所有相同的命题变项都用同一命题公式进行代换，则所得结果仍是重言式，即重言式的值不依赖于命题变项值的变化。

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$(s \rightarrow t) \vee ((s \rightarrow t) \wedge q) \Leftrightarrow (s \rightarrow t)$$

4. 应用举例——证明两个公式等值

课堂练习1： 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

证 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$ （蕴涵等值式，置换规则）

4. 应用举例——证明两个公式不等值

课堂讨论：

证明: $p\rightarrow(q\rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p\rightarrow q)\rightarrow r$

方法一　真值表法（自己证）

方法二　观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值，是右边的成假赋值.

方法三　用等值演算先化简两个公式，再观察.

课堂练习2:

用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

解 $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德.摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

该式为矛盾式.

课堂练习3：

$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

该式为重言式.

4. 应用举例——判断公式类型

课堂练习4：

$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解　$((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$　　（分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$　　（排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$　　（同一律）

该式为可满足式.

总结： A为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明： 演算步骤不唯一,应尽量使演算短些

第一章 命题逻辑

1.1 命题及符号化基本概念

1.2 命题等值演算

1.3 范式

1.4 逻辑电路

本讲主要内容

- 析取范式与合取范式
- 主析取范式与主合取范式
- 主析取范式的用途

引子：二次曲线类型的判定

给定二次曲线的一般形式，判断其类型：

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

转化为二次曲线的标准型：

$$\frac{X^2}{A'} + \frac{Y^2}{B'} = 1 \qquad \text{（椭圆/双曲线）}$$

$$Y = A'X^2 \qquad \text{（抛物线）}$$

1. 析取范式与合取范式

- **文字**:命题变项及其否定的总称.
- **简单析取式**:有限个文字构成的析取式.

  如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

- **析取范式**:由有限个简单合取式组成的析取式 $A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中 $A_1, A_2,\ldots, A_r$是简单合取式.
- **公式A的析取范式**: 与A等值的析取范式

1. 析取范式与合取范式

- **简单合取式**:有限个文字构成的合取式

  如： $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

- **合取范式**:由有限个简单析取式组成的合取式

  $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1, A_2,\ldots, A_r$是简单析取式

- **公式A的合取范式**: 与A等值的合取范式

1.析取范式与合取范式

说明：

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

$p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$既是析取范式，又是合取范式

(为什么?)

1.析取范式与合取范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式.

求公式A的范式的步骤：

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

$\vee$对$\wedge$分配（合取范式）

公式的范式存在，但不唯一。

1.析取范式与合取范式

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去$\to$）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

这既是A的**析取范式**（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的**合取范式**（由一个简单析取式组成的合取式）

1.析取范式与合取范式

课堂练习1：

$B=(p\to\neg q)\to r$

解　$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\to r$　（消去第一个→）

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$　（消去第二个→）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee r$　（否定号内移——德·摩根律）

这一步已为**析取范式**（两个简单合取式构成）

继续：　$(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$　（∨对∧分配律）

这一步得到**合取范式**（由两个简单析取式构成）

1. 主析取范式与主合取范式

定义 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项（极大项）**.

设文字的集合为$\{p, q, r, \ldots, \neg p', \neg q', \neg r' \ldots\}$,

则该集合的**极小值**为：

$$p \wedge q \wedge r \wedge \ldots \wedge \neg p' \wedge \neg q' \wedge \neg r' \wedge \ldots,$$

该集合的**极大值**为：

$$p \vee q \vee r \vee \ldots \vee \neg p' \vee \neg q' \vee \neg r' \vee \ldots。$$

1. 主析取范式与主合取范式

说明：

- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母*顺序*排列
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$称为极小项(极大项)的名称.
- m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

1.主析取范式与主合取范式

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

1.主析取范式与主合取范式

课堂讨论-由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

1. 析取范式与主析取范式

- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
- m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

1. 析取范式与主析取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如， $n=3$, 命题变项为 p, q, r 时,

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取范式：与A等值的主析取范式

A的主合取范式：与A等值的主合取范式.

2. 主析取范式与主合取范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

(1) 先求析取范式（合取范式）.

(2) 将不是极小项（极大项）的简单合取式（简单析取式）化成与之等值的若干个极小项的析取（极大项的合取），需要利用同一律（零律）、排中律（矛盾律）、分配律、幂等律等.

(3) 极小项（极大项）用名称m_i（M_i）表示，并按角标从小到大顺序排序.

2. 主析取范式与主合取范式

例1 求$\neg(p\to q)\vee\neg r$ 的主析取范式与主合取范式

解 (1) $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$

$p\wedge\neg q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge 1$ 同一律

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge(\neg r\vee r)$ 排中律

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$ 分配律

$\Leftrightarrow m4\vee m5$

$\neg r \Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge\neg r$ 同一律，排中律

$\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m0\vee m2\vee m4\vee m6$ 分配律

得 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow m0\vee m2\vee m4\vee m5\vee m6$

可记作 $\Leftrightarrow \Sigma(0,2,4,5,6)$

2. 主析取范式与主合取范式

课堂练习– $\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r \Leftrightarrow (p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$

$$p\vee\neg r \Leftrightarrow p\vee 0\vee\neg r$$ 同一律

$$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee\neg r$$ 矛盾律

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$$ 分配律

$$\Leftrightarrow M_1\wedge M_3$$

$$\neg q\vee\neg r \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee\neg r$$ 同一律，矛盾律

$$\Leftrightarrow (p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$$ 分配律

$$\Leftrightarrow M_3\wedge M_7$$

得 $\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r \Leftrightarrow M_1\wedge M_3\wedge M_7$

可记作 $\Leftrightarrow \Pi(1,3,7)$

快速求法——“查漏补缺”

设公式含有n个命题变项，则长度为k的简单合取式可展开成2^{n-k}个极小项的析取.

例如　公式含p, q, r

$$q \Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_2\vee m_3\vee m_6\vee m_7$$

长度为k的简单析取式可展开成2^{n-k}个极大项的合取

例如　$p\vee\neg r \Leftrightarrow (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

$$\Leftrightarrow M_1\wedge M_3$$

例2 (1) 求 $A \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee r$ 的主析取范式

这个已经是析取范式

解 用快速求法

（1） $\neg p \wedge q \Leftrightarrow$

$\neg p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow$

$r \Leftrightarrow$

2. 主析取范式与主合取范式

课堂讨论- 求 $B\Leftrightarrow \neg p\wedge(p\vee q\vee\neg r)$的主合取范式

解 $\neg p \Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow M_4\wedge M_5\wedge M_6\wedge M_7$

$p\vee q\vee\neg r \Leftrightarrow M_1$

得 $B\Leftrightarrow M_1\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6\wedge M_7 \Leftrightarrow \Pi(1,4,5,6,7)$

3. 主析取范式的用途

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

设公式A含n个命题变项，A的主析取范式有s个极小项，则A有s个成真赋值，它们是极小项下标的二进制表示，其余2^n-s个赋值都是成假赋值.

例如 $\neg(p\to q)\vee\neg r \Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6$

成真赋值：

000, 010, 100, 101, 110;

成假赋值：

001, 011, 111

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项,

则A为重言式当且仅当A的主析取范式含2^n个极小项，A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项,记作0。

A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个 极小项

3. 主析取范式的用途

例3 用主析取范式判断公式的类型：

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge q$ (2) $B \Leftrightarrow p \to (p \vee q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \to r$

解 (1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ 非重言式的可满足式

(3) 判断两个公式是否等值

例4 用主析取范式判断下面2组公式是否等值：

(1) p与$(\neg p \vee q) \to (p \wedge q)$

解 $p \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow m2 \vee m3$

$(\neg p \vee q) \to (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m2 \vee m3$

故 $p \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to (p \wedge q)$

3. 主析取范式的用途

(2) $(p\wedge q)\vee r$ 与 $p\wedge(q\vee r)$

解：$(p\wedge q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$
$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m1\vee m3\vee m5\vee m6\vee m7$

$p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m5\vee m6\vee m7$

故 $(p\wedge q)\vee r \not\Leftrightarrow p\wedge(q\vee r)$

(4) 应用主析取范式分析和解决实际问题

例5 某单位要从A,B,C三人选派若干人出国考察，需满足下述条件:

(1) 若A去，则C必须去； $p\to r$,

(2) 若B去，则C不能去； $q\to\neg r$,

(3) 若C不去， 则A或B可以去。 $\neg r\to (p\vee q)$

问有几种可能的选派方案?

解 记p:派A去， q:派B去, r:派C去

求下式的成真赋值

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to (p\vee q))$$

课堂讨论

求A的主析取范式

$$A=(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(r\vee p\vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$$

成真赋值:001,010,101

结论：方案1 派C去，方案2 派B去

方案3 C去， 而A,B都不去

思考

- A中含n个命题变项，其主析取范式含s个极小项，则A有多少个成真赋值和成假赋值？其主合取范式有多少个极大项？
- n个命题变项可产生多少个不同的主析取范式？
- 如何根据公式的主析取范式求其主合取范式？

命题逻辑应用：逻辑谜题

一个岛上居住着两类人——骑士和无赖。骑士说的都是真话，无赖只会说假话。你碰到两个人A和B。如果A说“B是骑士”，B说“我们是两类人”，判断A和B分别是那类人。

设 p： A是骑士；q： B是骑士。

a： q为真。

b： $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$为真。

则有如下两种情况：

1）若p真，则q, a, b都为真，但b为假，则矛盾；

2）若p假，则q, a, b都为假，成立，则A与B都是无赖。

命题逻辑应用：数独游戏

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

$$\bigwedge_{i=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{j=1}^{9} p(i,j,n)$$

$$\bigwedge_{j=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{9} p(i,j,n)$$

$$\bigwedge_{r=0}^{2}\bigwedge_{s=0}^{2}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{3}\bigvee_{j=1}^{3} p(3r+i,3s+j,n)$$

$$p(i,j,n) \rightarrow p(i,j,n') \qquad n \neq n'$$

1.4 组合电路

- 组合电路
- 逻辑门

  与门， 或门， 非门， 与非门， 或非门

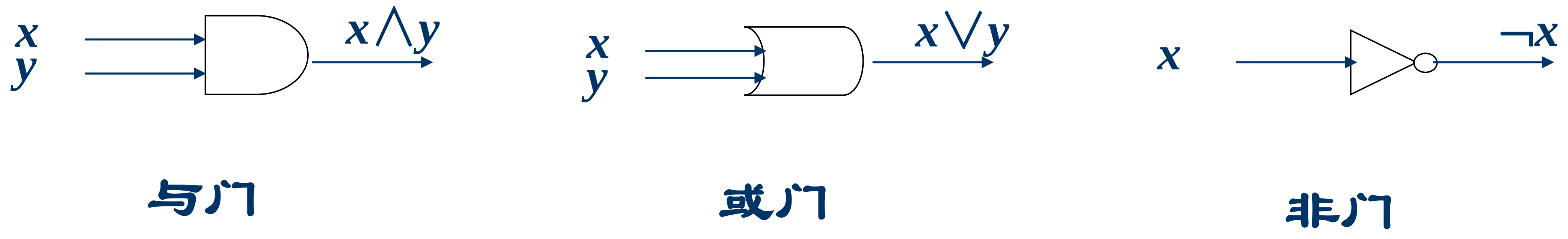
- 奎因–莫可拉斯基方法

组合电路

逻辑门：实现逻辑运算的电子元件.

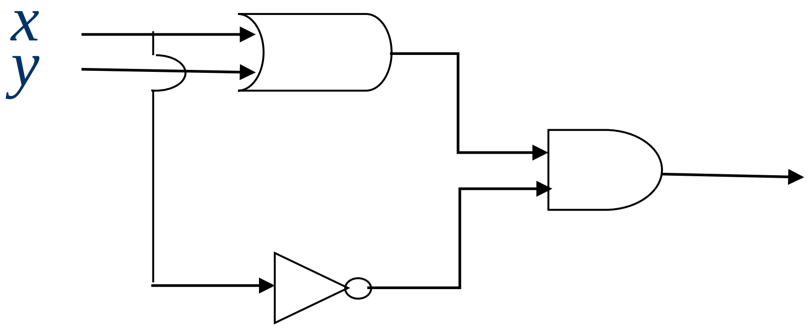
与门，或门，非门.

组合电路:实现命题公式的由电子元件组成的电路.

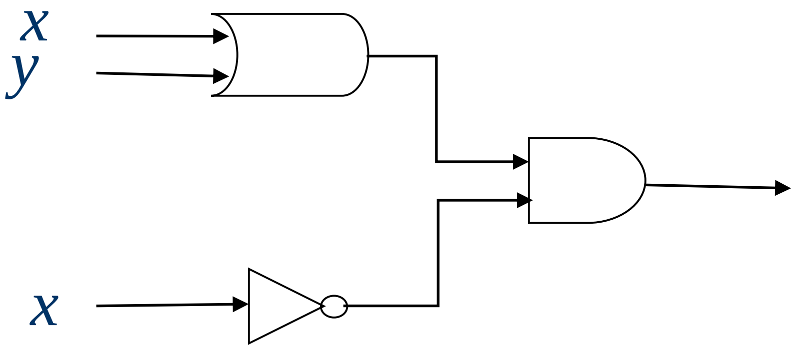


组合电路的例子

$(x \vee y) \wedge \neg x$的组合电路



第一种画法



第二种画法

例

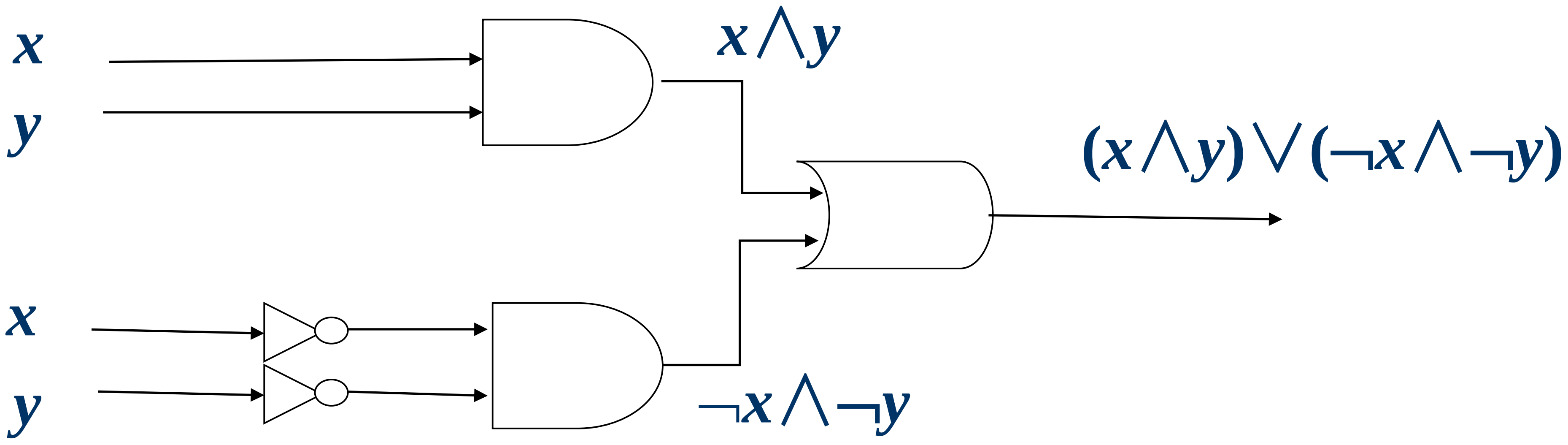
楼梯的灯由上下2个开关控制，要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯. 试设计一个这样的线路.

解 x, y:开关的状态，F:灯的状态，打开为1，关闭为0.
不妨设当2个开关都为0时灯是打开的.

x	y	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$F=m_0 \wedge m_3= (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$$

例(续)



设计组合电路

步骤: 1.构造输入输出表(问题的真值函数),

2. 写出主析取范式,

3. 化简.

最简展开式: 包含最少运算的公式

例　当且仅当 $x=y=z=1$ 或 $x=y=1$ 且 $z=0$ 时输出1.

$$F= m_6 \vee m_7 = (x\wedge y\wedge\neg z)\vee(x\wedge y\wedge z)$$

4个与门,1个或门和一个非门

$F\Leftrightarrow x\wedge y$　　一个与门

奎因-莫可拉斯基方法（*）

1. 合并简单合取式生成所有可能出现在最简展开式中的项.

2. 确定最简展开式中的项.

例 求下述公式的最简展开式：

$$F=(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)\vee(x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4)$$
$$\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4)$$

例子（续）

解

编号	极小项	角码	标记	
1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1110	*	
2	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	1011	*	
3	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0111	*	
4	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1010	*	
5	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0101	*	
6	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0011	*	
7	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0001	*	

例子(续)

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1–10		(3,5,6,7)	$\neg x_1 \wedge x_4$	0– –1
(2,4)	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	101–				
(2,6)	$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	–011				
(3,5)	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$	01–1	*			
(3,6)	$\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$	0–11	*			
(5,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0–01	*			
(6,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4$	00–1	*			

标记*表示该项已被合并

例子(续)

项	覆盖	运算符数
$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	(1,4)	3
$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1 \wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7)，或者(1,4), (2,6)和(3,5,6,7).

最简展开式为

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

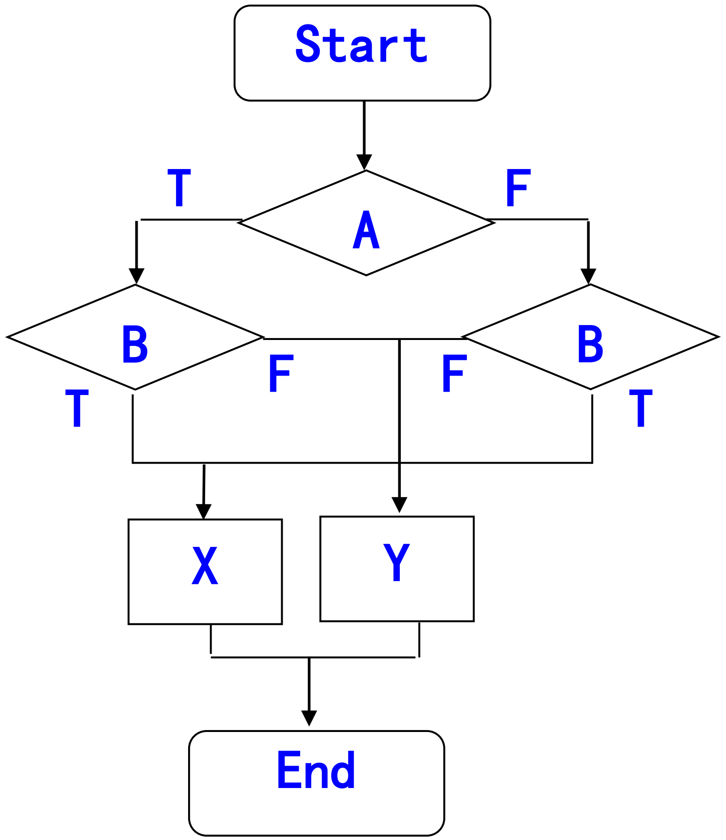
或

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

实例

画出下面程序语言的流程图并进行化简。

If *A* then if *B* then *X* else *Y* else if *B* then *X* else *Y*



解：执行X的条件为：

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

执行Y的条件为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

实例（续）

执行X的条件可化简为：

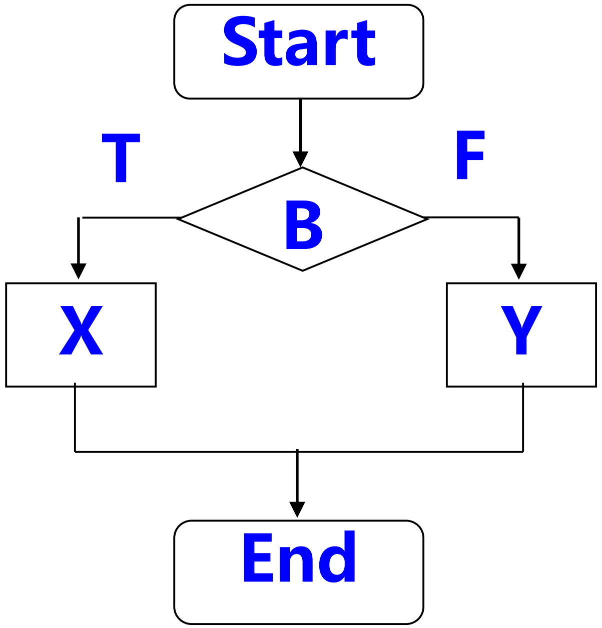
$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$$

$$= B \wedge (A \vee \neg A) = B$$

执行Y的条件可化简为：

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$= \neg B \wedge (A \vee \neg A) = \neg B$$



程序可简化为：If B then X else Y

课外习题

- 课后习题：9、11、15、20
- 答题派题目：如截图

1. 1.8 用等值演算法证明下列等值式。 (30)

(1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$

(2) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \Leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$

(3) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

2. 1.12 求下列命题公式的主析取范式、主合取范式、成真赋值、成假赋值。 (30)

(1) $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \wedge q \wedge r)$

(2) $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

(3) $\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$

3. 1.15 某勘测队有3名队员。有一天取得一块矿样，3人的判断如下。 (20)

甲说：这不是铁，也不是铜。

乙说：这不是铁，是锡。

丙说：这不是锡，是铁。

经实验室鉴定后发现，其中一人两个判断都正确，一人判断对一半，另一个人判断全错了。根据以上情况判断矿样的种类并指出谁的判断全对？谁的判断对一半？谁的判断全错？

4. 1.17 输入输出的关系如表1-2和表1-3所示，试写出实现它们的组合电路的合式公式，并用奎因-莫可拉斯基方法化简。 (20)

表 1-2

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

表 1-3

x_1	x_2	x_3	x_4	F	x_1	x_2	x_3	x_4	F
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0