座位号______________

浙江理工大学 2022-2023 学年第二学期

《线性代数 A》期末试卷（A）卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：____________　　学号：____________　　专业班级：______________

题号	一	二	三					四		总分
			1	2	3	4	5	1	2	
得分										
签名										

一. 选择题(每题请选出一个正确选项，每小题 4 分，共 24 分)

1.下列命题中正确的是(　　).

A. 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性相关　　B . 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性无关

C. 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关　　D. 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关

2.行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\quad\quad) a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

A. $-1.$　　B. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$　　C. $-n.$　　D. $-\frac{n(n-1)}{2}$

3. 若 A 为三阶方阵，且 $|\mathbf{A}+2\mathbf{E}|=0, |2\mathbf{A}+\mathbf{E}|=0, |3\mathbf{A}-4\mathbf{E}|=0$，则 $|\mathbf{A}|=$（　　　）.

A. -8　　B . 8　　C . $-\dfrac{4}{3}$　　D . $\dfrac{4}{3}$

4. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是（　　　）.

A. $\boldsymbol{A}$ 可逆　　B. $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同

C. $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量　　D. $\boldsymbol{A}$ 无零特征值

5. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，则下列选项中正确的是（　　　）.

A. $\mathbf{A}$是正定的　　B. $\mathbf{A}$是负定的　　C. $\mathbf{A}$是不定的　　D. 以上都不对

6.设 A 为$m \times n$矩阵，B 为$n \times m$矩阵，则下列选项中正确的是（　　）

A. 当$m > n$时，必有$|AB| = 0$　　B. 当$m > n$时，必有$|AB| \neq 0$

C. 当$n > m$时，必有$|AB| = 0$　　D. 当$n > m$时，必有$|AB| \neq 0$

二．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 已知$\alpha = [3 \quad 3 \quad -2]^T, \beta = [-1 \quad 3 \quad a]^T$, 且$\alpha$与$\beta$正交，则$a =$ ________

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，且$\left|\boldsymbol{A}\right| = 5$，则$\left|\boldsymbol{A}^*\right| =$________，$R(AA^*) =$________________.

3. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$，则$(A+E)^{-1}$=____________________.

4. $\lambda = 2$是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于 __________

5. 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 5，2，1，若 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 则$a =$ ___, $b =$ ___

6. 从基$\varepsilon_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$，$\varepsilon_2 = (0 \quad 1 \quad 0), \varepsilon_3 = (0 \quad 0 \quad 1)$ 到基$\alpha_1 = (1 \quad 2 \quad 3)$，$\alpha_2 = (-1 \quad 1 \quad 0), \alpha_3 = (2 \quad -1 \quad 1)$到过渡矩阵为 _____________

三．计算题（1，2，3 每小题 8 分，4，5 每小题 10 分，共 44 分）

1. 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 1）$\mathrm{A}^{-1}$.　2）行列式$|A|$的所有元素的代数余子式之和.

2． 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$，若 $XA = B + X$，求矩阵 X.

3. 求向量组$\alpha_1=[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[2,1,-3,7]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[3,1,0,3]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=[4,1,3,-1]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=[4,3,1,-3]^{\mathrm{T}}$的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

4. 设非齐次线性方程组$\begin{cases} 2\lambda x_1+x_2+2\lambda^2 x_3=\lambda, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^3, \end{cases}$

（1）λ取何值时，方程组（a）有唯一解；（b）无解；(c) 有无数多个解. 并且

在方程组有无数多个解时，用该方程组的一个特解及对应齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

（2）设该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$ ，试问 λ 取何值时，存在三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ ，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

5. 用正交变换法化二次型 $f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形，并写出变换所用的矩阵.

四．证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明：$\alpha_1,2\alpha_1+3\alpha_2,3\alpha_2+4\alpha_3$也线性无关。

2．设 A,B 均为 n 阶矩阵，且 $|A|\neq 0$，证明 AB 与 BA 相似.

浙江理工大学 2022 —2023　学年第 二 学期

《 线性代数 A 》期末试卷（ A ）卷标准答案和评分标准

一. 选择题(每题请选出一个正确选项，每小题 4 分，共 24 分)

1.C　　2.B　　3.D　　4.C　　5.B　　6.A

二．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．3

2．　25，3

3．$\dfrac{2E-A}{2}$

4．　$\frac{3}{4}$

5.　　a=7　　b=-2

6. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

三．计算题（1，2，3 每小题 8 分，4，5 每小题 10 分，共 44 分）

1. 解：1）$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$　　1 分

其中$A_1=[1], A_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$A_1{}^{-1}=[1], A_2{}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$　　3 分

$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & A_2{}^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$　　4 分

2）$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$，又因为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$　　6 分

$|A|$的所有代数余子式之和为：1+1-1-1+2=2　　8 分

2．解：由 $XA=B+X$ 得 $XA-X=B$，即 $X(A-E)=B$．又有　　2 分

$$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&3&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,\quad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^*=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$$ ……5 分

从而 $$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$$ ……6 分

故 $$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&4\\-4&2&6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\-2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&5\\-5&4&5\end{pmatrix}$$

…………………………………………………………………………. 8 分

3. 解：$[\boldsymbol{\alpha_1}，\boldsymbol{\alpha_2}，\boldsymbol{\alpha_3}，\boldsymbol{\alpha_4}，\boldsymbol{\alpha_5}]$

$$=\begin{bmatrix}1&2&3&4&4\\0&1&1&1&3\\1&-3&0&3&1\\0&7&3&-1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&-1&-3\\0&0&1&2&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ ………. …4 分

则向量组的秩为 3，α_1，α_2，α_3 为一个极大无关组， …………6 分

且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-8\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$. …………8 分

4. 解：$D=\begin{vmatrix}2\lambda&1&2\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=2\lambda^2-3\lambda+1=(2\lambda-1)(\lambda-1)$， ………2 分

（1）当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq1$ 时，$D\neq0$，此时方程组有惟一解. ………4 分

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&\frac12&\frac12\\1&\frac12&1&\frac14\\1&1&\frac12&\frac18\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&\frac12&\frac12\\1&\frac12&1&\frac14\\0&0&0&-\frac38\end{pmatrix},$$

系数矩阵的秩为 2, 增广矩阵的秩为 3, 此时方程组无解. ………6 分

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵

$$B=(A\vdots\beta)=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=1\end{cases}$，令$x_3=c$，得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(c\in R)$，　　………8 分

此为$\lambda=1$时对应方程组的通解.

（2）系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩小于 3 时，线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解，此时存在三阶矩阵$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 由$|A|=(2\lambda-1)(\lambda-1)=0$得$\lambda=\dfrac{1}{2}$或$\lambda=1$.　　………10 分

5. 解　二次型的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，………………(2 分)

矩阵的特征方程为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$，

故A的特征值为$\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. ………………（5 分）

对于$\lambda_1=4$，解方程组$(4E-A)X=O$，

即$\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，

得属于特征值$\lambda_1=4$的一个特征向量$\xi_1=(2,-2,1)^T$，

将ξ_1标准化，得$\eta_1=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$. ………………(6 分)

对于$\lambda_2=1$，解方程组$(E-A)X=O$，

即$\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，

得属于特征值$\lambda_2=1$的一个特征向量$\xi_2=(2,1,-2)^T$，

将ξ_2标准化，得$\eta_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T$. ………………（7 分）

对于$\lambda_3=-2$，解方程组$(-2E-A)X=O$，

即$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

得属于特征值$\lambda_3=-2$的一个特征向量$\xi_3=(1,2,2)^T$，

将ξ_3标准化，得$\eta_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$. ………………（8 分）

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，………………（9 分）

则通过正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

即可将二次型f化为标准形式$g(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2+y_2^2-2y_3^2$. ………………（10 分）

四．证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 证明：设由数组k_1，k_2，k_3，使得$k_1\alpha_1+k_2(2\alpha_1+3\alpha_2)+k_3(3\alpha_2+4\alpha_3)=0$，则

$(k_1+2k_2)\alpha_1+(3k_2+3k_3)\alpha_2+(4k_3)\alpha_3=0$ ………… 1 分

因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以$\begin{cases} k_1+2k_2 = 0 \\ 3k_2+3k_3=0 \\ 4k_3=0 \end{cases}$ …………2 分

系数行列式 D=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$，⋯ ………… 3 分

只有零解$k_1 = k_2 = k_3 = 0$

因此$\alpha_1, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_2 + 4\alpha_3$线性无关. ………… 4 分

2.证：因为 A 可逆，故，$\mathbf{A}^{-1}$存在， ………… 1 分

则$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = BA$ ………… 3 分

故，AB 与 BA 相似。 ………… 4 分