

浙江理工大学 2023-2024 学年第 1 学期

《高等数学 A1》期中试卷答案

参考答案与评分标准

姓名：_____ 学号：_____ 班级：_____ 成绩：_____

一、 1.D 2.A 3.C 4.B 5.D 6.D

二、 1. $-3, \frac{9}{2}$ 2.1 3. $(1+x)e^x dx$ 4. $\frac{4(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$ 5. $-\frac{3}{2}$ 6. $\frac{10}{3}$

三、 简答题.

1. 解:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \dots\dots\dots 2 \text{分} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x \cos 2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 4x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(4x)^2}{2}}{6x^2} \dots\dots\dots 4 \text{分} \\ &= \frac{4}{3} \dots\dots\dots 6 \text{分} \end{aligned}$$

2. 解:

当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = -x$,
 当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = x$,
 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 0$,
 当 $x = -1$ 时, $f(x) = 0$,.....4分

因此, 在区间 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ 上, $f(x)$ 为连续函数,
 $x = \pm 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点。.....6分

3. 解:

由 $f(x)$ 在定义域上处处可导知, $f(x)$ 在定义域上处处连续,
 即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 + e,$$

即

$$a + b = 1 + e \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

由导数定义知

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2a = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

因此,

$$a = e \quad b = 1 \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

4. 解:

对方程两边同时取对数得

$$x \ln \cos y = y \ln \sin x, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

对上述两边同时对 x 求导, 得

$$\ln \cos y + x \frac{1}{\cos y} (-\sin y) y' = y' \ln \sin x + y \frac{1}{\sin x} \cos x,$$

整理得,

$$y' = \frac{\ln \cos y - y \cot x}{\ln \sin x + x \tan y}, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

即

$$dy = \frac{\ln \cos y - y \cot x}{\ln \sin x + x \tan y} dx \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

5. 解:

$$x'(t) = 1 - \frac{2t}{1+t^2},$$

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

所以,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = 1 - 2t + t^2 \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

因此,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d(dx/dy)/dt}{dy/dt} = \frac{2t-2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2)(t-1) \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

四.

1. 解:

(1) 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

令 $y' = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. 所以, 单调递增区间为 $(-\infty, 1), (3, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, 3)$, $x = 3$ 取得极小值 $\frac{27}{4}$ 2分

$$(2)y'' = \frac{6x}{(x-1)^4},$$

$$\text{令 } y'' = \frac{6x}{(x-1)^4} = 0, \text{ 知 } x = 0,$$

所以, 凹区间为 $(0, 1), (1, +\infty)$,

凸区间为 $(-\infty, 0)$, 拐点为 $(0, 0)$4分

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = 2,$$

所以, $x = 1$ 是铅直渐近线,

$y = x + 2$ 是斜渐近线。.....7分

2. 解:

$$\text{令 } f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k, (x > 0),$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, \text{ 令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = e.$$

因此, 在 $(0, e)$ 上, $f(x)$ 单调递增; 在 (e, ∞) 上, $f(x)$ 单调递减.

即 $f(x)$ 的最大值为 k2分

所以, 当 $k < 0$ 时, 方程无根;

当 $k = 0$ 时, 方程有唯一根 $x = e$;.....4分

当 $k > 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

即方程有两个根.....7分

五.

1. 证明:

令

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{4} + \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}, (0 < x < 2),$$

则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4x^2} = -\frac{(x-1)(x-3)}{4x^2}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$2分

在区间 $(0, 1)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

在区间 $(1, 2)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

因此, $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上恒大于等于 0, 证毕.....4分

2. 证明:

由闭区间连续函数性质得, $f(x)$ 有界, 即存在 m, M 使得 $m \leq f(x) \leq M$,2分

又 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, 我们有

$$m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M,$$

即

$$m \leq 1 \leq M.$$

由介值定理知, 存在 $C \in [0, 3]$, 使得 $f(C) = 1$3分

在 $[C, 3]$ 上利用罗尔定理, 存在 $\xi \in (C, 3) \subset (0, 3)$ 使得 $f'(\xi) = 0$4分