

导数公式

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \quad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(x^x)' = x^x(1+\ln x)$$

积分公式

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx = -2\sqrt{1-x}$$

(凑微分)

等价无穷小公式.

$$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \operatorname{arcsin} x \sim \arctan x \sim \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \rightarrow e$$

8-2 数量积 向量积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

无法构成 n 行 n 列时
补 0.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

8-3 平面

法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 可由两直线叉乘得出

点法式 $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

一般式 $Ax + By + Cz = 0$

截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a, b, c 是截距.

平面夹角

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \\ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\end{aligned}$$

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0, \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$$

点面距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|f(x_0, y_0, z_0)|}{|\vec{n}|}$$

2-4 直线

方向向量 $\vec{s} = (l, m, n)$

参数方程:
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

对称式:
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ \times (A_2, B_2, C_2) \end{pmatrix}$$

两点式:
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
$$\vec{s} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

线面角: $\sin \theta = |\cos \phi| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$

面面角: $\cos \theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|}$

8-5 曲面(1)

旋转曲面: 绕1轴转, 1轴不变, 另外一部分

是剩下2个轴为 $\overline{m^2+n^2}$

eg. $f(x, y) = 0$, 绕 y 转, 变为 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$

球面: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

单叶双曲面 (2正1负) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



双叶双曲面 (1正2负) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



双曲抛物面 $z = \pm \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$

(马鞍面)



7-5 曲面 (2)

椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



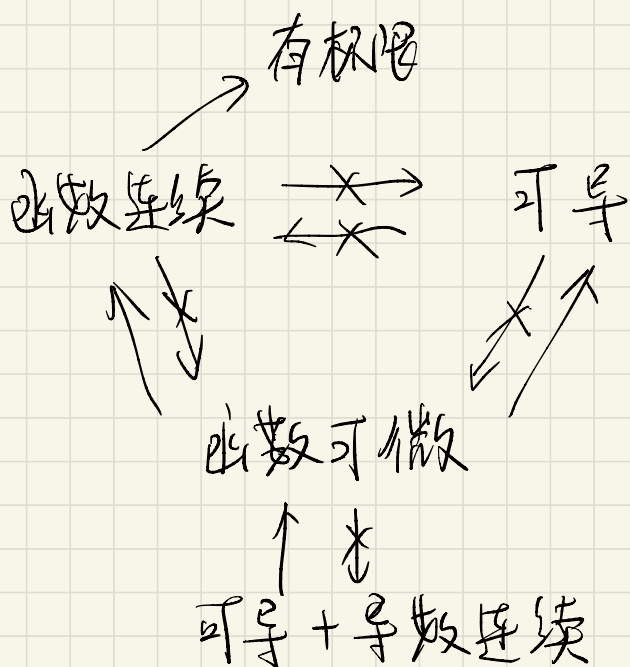
双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$



抛物柱面 $x^2 = 2py$



9-2 偏导数



$$f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

9-3 全微分

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

可微: ① 偏导存在
② 导数 } 连续
 } 不连续

↪ $\rho = \sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - z'_x \Delta x - z'_y \Delta y}{\rho} = 0$$

9-5 隐函数

定理 1: $F=0, F'_y \neq 0, y=f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

定理 2: $F=0, F'_z \neq 0, z=f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

定理 3: 略.

$$\begin{cases} F=0 \\ G=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_x=0 \\ G'_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \dots \\ \frac{dz}{dx} = \dots \end{cases}$$

求二阶导可用方程两端同时求导.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 时, y 视作常数, $z \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}$.

也可对 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 直接求导, $z \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}$.

9-6 微分几何应用 (以下所有导数都要带值)

曲线:

$$(1) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{切向量 } \vec{T} = (x'_t, y'_t, z'_t) = (a, b, c)$$
$$\text{切线: } \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\text{法平面: } a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$

(2)

$$\begin{cases} F=0 \\ G=0 \end{cases} \quad \text{切向量 } \vec{T} = (F'_x, F'_y, F'_z) \times (G'_x, G'_y, G'_z) = (a, b, c).$$

$$\text{切线: } \begin{cases} F'_x(x-x_0) + F'_y(y-y_0) + F'_z(z-z_0) = 0 \\ G'_x(x-x_0) + G'_y(y-y_0) + G'_z(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{法平面: } a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

曲面: $F=0$.

$$\text{法向量 } \vec{n} = \pm (F'_x, F'_y, F'_z) = (a, b, c)$$

$$\text{切平面: } a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$

$$\text{法线: } \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

9-7 方向导数 梯度.

方向导数: $\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x \cos \varphi + f'_y \sin \varphi$. 是一个实数

梯度: $\text{grad } f(x, y) = (f'_x, f'_y) = \nabla f(x_0, y_0)$.

单位方向向量* $\vec{e}_l = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$

即 $\frac{\partial f}{\partial l} = \overrightarrow{\text{grad}} \cdot \vec{e}_l$ 方向导数 = 梯度 · 方向余弦

三元函数 $\vec{e}_l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

先得到方向向量, 再单位化.

当 $\overrightarrow{\text{grad}}$ 与 \vec{e}_l 同向时, $\frac{\partial f}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad}}| = \max(\text{变化率})$

$\overrightarrow{\text{grad}}$ 与 \vec{e}_l 反向, $\frac{\partial f}{\partial l} = -|\overrightarrow{\text{grad}}| = \min$

$\overrightarrow{\text{grad}}$ 与 \vec{e}_l 正交 $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$.

9-8 极值 条件极值

极值: $f'_x = 0, f'_y = 0$

$$f''_{xx} = A, f''_{xy} = B, f''_{yy} = C$$

$$\textcircled{1} AC - B^2 > 0 \quad \begin{cases} A < 0 \Rightarrow \text{Max} \\ A > 0 \Rightarrow \text{Min} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} AC - B^2 < 0 \quad \text{不是极值}$$

$$\textcircled{3} AC - B^2 = 0 \quad \text{不确定. } \times \text{ 有极值, } AC - B^2 > 0$$

Lagrange 乘数法!

求 $z = f(x, y)$ 在 $\varphi(x, y) = 0$ 条件下极值.

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

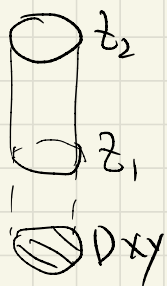
10-3 三重积分 (1)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

$$\iiint_{\Omega} 1 dV = V_{\Omega}$$

直角坐标:

投影法: $\iiint = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$



在前面的积分,
上下限是常数.

截面法: $\iiint = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$

柱面坐标:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

$$\iiint = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \theta)}^{z_2(\rho, \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz$$

10-3 三重积分 (2)

球面坐标:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi.$$

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin \varphi d\varphi \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(\mathbf{x}) r^2 dr.$$

对称性:

Λ_1, Λ_2 关于 xOy 对称, f 是 z 的奇函数

$$\Rightarrow \iiint_{\Lambda_1 + \Lambda_2} = 0$$

xOz, yOz 同理

11-1 第一类曲线积分: 弧长

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

Δs_i 是第 i 段的长度. L : 积分弧段

计算法: $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$$

~~且~~: $a < b$.

11-2 第二类曲线积分：坐标.

$$\int_L \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} \quad \text{变力沿曲线作功}$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \searrow \\ P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} & & dx + dy \end{array}$$

$$\int_L F dr = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

计算法: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b (P[x(t), y(t)] x'_t + Q[x(t), y(t)] y'_t) dt$$

a 不一定比 b 小

两类曲线积分的联系

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds.$$

α, β 为弧 L 切向量的方向角

11-3 格林公式

闭区域 \iint_D \Leftrightarrow 边界曲线 \oint_L 通常反过来用.
(=重积分) (曲线积分)

$$\iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

L 取正向, D 由分段光滑 L 围成.

若 D 由 L 围成, $S_D = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$

积分与路径无关:

$\oint_L P dx + Q dy$ 在 G 内 路径无关

$$\Leftrightarrow \text{沿 } G \text{ 内 闭曲线 } C \text{ 的 } \oint_C P dx + Q dy = 0$$

$$\Leftrightarrow P'_y = Q'_x$$

$$\Leftrightarrow P dx + Q dy \text{ 有全微分 } u(x, y)$$

$$P dx + Q dy = du$$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Q dy$$

11-4 第一类曲面积分：面积

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

Σ : 积分曲面.

计算法:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \underbrace{z'_x{}^2 + z'_y{}^2}_{z'_z{}^2}} dx dy$$

Σ : 曲面, z 的表达式 ; D_{xy} : 投影, 通常为约束条件表达式.

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} 1 dS = \iint_{D_{xy}} 1 \cdot \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy.$$

11-5 第二类曲面积分：坐标

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_{ixy})$$

计算法:

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

若曲面取对应坐标轴的更远侧，
那么取正号，否则为负号。

两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在 (x, y, z) 法向量的方向余弦

11-6 高斯公式

$$\iiint_{\Omega} (P'_x + Q'_y + R'_z) dv = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

空间闭区域三重积分 \Leftrightarrow 闭曲面曲面积分

$$\iiint_{\Omega} (P'_x + Q'_y + R'_z) dv = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

\cos 是 Σ 法向量的方向余弦

12-2 常数项级数收敛法.

比值: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho.$

$\rho < 1$ 时可收可发.

根值: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho.$

交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

(条件收敛, 不一定绝对收敛)

① $u_n \geq u_{n+1}$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Rightarrow$ 收敛, 且 $S \leq u_1$

|余项 r_n | $\leq u_{n+1}$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

几何/等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} |q| < 1, \text{收} \\ |q| \geq 1, \text{发} \end{cases}$

p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1, \text{收} \\ p \leq 1, \text{发} \end{cases}$

12-3 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Abel 阿贝尔定理及推论:

$|x| < R$, 绝对收敛; $|x| > R$, 发散.

$x = \pm R$ 时, 可收可发.

$(-R, R)$ 为收敛区间. 收敛域 \subseteq 收敛区间.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \quad R = \frac{1}{\rho}.$$

和函数: 常用公式见 12-4

12-4 幂级数展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1, 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \mathbb{R}$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [-1, 1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad [-1, 1]$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_m^n x^n \quad (-1, 1)$$

12-7 傅里叶级数

正交系: $1, \cos nx, \sin nx, \sin kx \cos nx,$
 $\sin kx \sin nx, \cos kx \cos nx$
在 $[-\pi, \pi]$ 积分为 0.

傅里叶级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx \quad n=1, 2, 3, \dots$$

正弦级数, 余弦级数

↓
只有 sin

↓
只有 cos