



高等数学 A1

浙江理工大学期末试题汇编

(试卷册 上)

学校: _____

专业: _____

班级: _____

姓名: _____

学号: _____

(此为 2021 年 第二版 第 2 次发行)

目录

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	1
2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	5
3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	8
4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	12
5 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷.....	16
6 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	19
7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	23
8 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	27
9 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷.....	31
10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷.....	35

（非常抱歉，由于本人工作失误，录入出现问题，导致试卷录入年份不正确，这是最新版本）

说明：1 高数系列试卷见本书最后一页。如有其他需要，请加入 QQ 群获取其他资料；

2 《高等数学 A1》中的期末 A 卷是学期末尾进行的统一考试试卷，B 卷是开学后一两周内进行的补考试卷。

写在前面

青春透明如醇酒，可饮，可尽，可别离。我独钟爱席慕蓉女士的诗句，在她的笔下，青春有着泛黄的扉页，是一本太仓促的书，青春是踏月的旅行，是月光下的华裳，青春是热泪汇成的河流，是戴着祝福的离别。诗里的青春是细腻优美的，然而，此刻当你翻开这本试卷册，你的青春便和这几套高数试卷结下不解之缘。

我始终相信，能来到大学读书的你们，也曾有过宏图大志，渴望在崭新的大学阶段好好学习，不负韶华，让成绩名列前茅，甚至拿到奖学金。但是实际又有多少人平时课上开小差刷手机，作业不认真完成，最后逼近期末，才发现复习竟变成了预习。

你可曾发现过吗？大概率上，我们曾经只“想”做到的事情，直到今天也没做到。当你看到你的同学纤细的手指盈跃在钢琴琴键上时，当你看到你的情敌歌声飘扬，怀抱里的吉他散发出无限魅力的时候，当你看到专业的学霸们闪着自信的光芒登上领奖台的时候，你的内心是否有过诸多羡慕呢？如果有，那你为自己的这份羡慕付出过足够的努力吗？可叹的是，更多的人在短暂的奋发后又流于过往颓丧的生活。

众所周知，行动起来，是打破焦虑与幻想最理想的武器。在期末备考高数的时候，我亲身经历了从知识点从陌生到熟悉的过程，遇到不懂的题，我会去查阅课本，去找相关视频，去问同学。就这样，做完了、摸熟了这套题之后，对于百分之九十的题型我都了然于心了，最后也拿到了九十多的分数。

我们常常说，坚持下去，就是无论遇到多大的困难都不要放弃。所以，在学习的过程中，请一定不要停留在想的层面，去做题，去思考，去讨论。而在做这些事情的时候，我们的内心一定充盈着无比的充实感和幸福感。

十年以后，你想成为什么样的人？

大学阶段是人生的起点，我们第一次可以自主决定自己的人生，我们现在所做的每一个选择，所做出的每一次努力，都一点一滴地构造成了我们未来的模样。

诸君，愿以梦为马，不负韶华！

与君共勉，我们山顶见！

（有删改）

资料说明

试卷整理人：张创琦

版次：2021 年 12 月 19 日 第二版 第 2 次发行

微信公众号：创琦杂谈

本人 QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）：749060380

创琦杂谈大学数学学习交流群（QQ 群）：967276102

微信公众号：用于提前告知资料更新内容，分享一些学习内容和一些优秀的文章，我也会写一些文章，主要是以大学生视角进行一些事情的审视批判。

创琦杂谈学习交流群：更新每个科目（不仅限于数学）的学习资料，群里可进行学习等相关问题的探讨。

创琦杂谈大学数学学习交流群：群里可以进行高等数学、线性代数、概率论与数理统计、离散数学、复变函数、数学建模等等数学科目的问题的交流，大一大二等在修同学和考研同学都可以在里面学到很多知识，群里数学考试用相关资料和数学课外补充资料都很多，大家可自行下载阅览。群相册用于更新一些小的知识点，并进行一些勘误。群里讨论问题的氛围也非常浓厚，欢迎大家加群学习。

如果有任何问题可以联系我的 QQ 哈，我的性格很开朗，喜欢结交更多的朋友，欢迎大家加我的联系方式哈~

版权声明：试卷整理人：张创琦，试卷首发于 QQ 群“创琦杂谈学习交流群”和“创琦杂谈大学数学学习交流群”，转发前需经过本人同意，侵权后果自负。本资料只用于学习交流使用，禁止进行售卖、二次转售等行为，一旦发现，本人将追究法律责任。解释权归本人所有。

在这里感谢我的高数老师以及其他老师们对我的鼎力帮助！（高数老师不让我写上她的名字，那我就在这里默默感谢她吧）

浙理羊同学 YOUNG

大家好，这里是浙理羊同学 YOUNG，一个致力于打造成为浙理校内最全最大的信息发布平台。如果你有爆料吐槽、闲置交易、失物招领、表白脱单、树洞聊天、互推捞人等需求，就来找羊羊聊天吧~（下面是浙理羊同学 YOUNG 的微信号，有需求可以加哈）



1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（共 24 分，每题 4 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

- 1 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$ ，则 $k =$ ()
A. $k = -2$ B. $k = -1$ C. $k = 1$ D. $k = 2$
- 2 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 与 $y = x^3 + x$ 点 $(1, 2)$ 处相切，则 a, b 的值为 ()
A. $a = 0, b = -2$ B. $a = 2, b = -1$ C. $a = 1, b = -3$ D. $a = -3, b = 1$
- 3 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且 $f(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ ，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ ()
A. 不可导 B. 可导且 $f'(0) \neq 0$ C. 取得极大值 D. 取得极小值
- 4 若 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x + C$ ，则 $f(x) =$ ()
A. e^x B. e^{-x} C. $-2e^{-2x}$ D. $2e^{-2x}$
- 5 反常积分 $\int_{-\infty}^0 e^{-kt} dt$ 收敛，则 ()
A. $k > 0$ B. $k < 0$ C. $k \geq 0$ D. $k \leq 0$
- 6 微分方程 $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是 ()
A. $y = (x + C)^2$ B. $y = x^3 + 1$ C. $y = C(1 + x)^3$ D. $y = (x + 2)^3$

二 填空题（共 24 分，每题 4 分，把答案填在题中横线上）

- 1 曲线 $y = 1 - e^{-x^2}$ 的凹区间是_____。
- 2 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的极大值为_____。
- 3 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx =$ _____。
- 4 设 $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$ ，则 $f(x)$ 的第一类间断点是_____。
- 5 设 $\int f(x) dx = \sin x + C$ ，则 $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$ _____。
- 6 方程 $xy' - (1 + x^2)y = 0$ 的通解为_____。

三 计算题（共 30 分，每题 6 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$ 。

2 求不定积分 $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ 。

3 求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

4 设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = e$ 确定的函数，求 $y'(0), y''(0)$ 。

5 求微分方程 $y'' + 2y' + 9y = 8e^{-x}$ 的通解。

四 综合题（共 14 分，每题 7 分，应写出具体的解题过程）

1 设曲线 $y = x^2$ 与直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D ，求：

(1) D 的面积 A ；(2) D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积 V_y 。

- 2 设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$, 求:
- (1) $F(x)$ 所满足的一阶微分方程; (2) $F(x)$ 的表达式。

五 证明题 (共 8 分, 每题 4 分)

- 1 证明: 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$ 。

2. 设函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$, 证明: 存在 $\xi \in (1, 2)$, 使得 $f(2) = \xi e^{\xi^2} \ln 2$ 。

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 设 $x_n \leq a_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 均为数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ()

- A. 存在且等于零 B. 存在但不一定等于零
C. 一定不存在 D. 不一定存在

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()

- A. $-2f'(0)$ B. $-f'(0)$ C. $f'(0)$ D. 0

3. 下列各式正确的是 ()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = -e$

4. $f(x) = \cos x$, 则 $\int \frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) dx =$ ()

- A. $-\cos \frac{1}{x} + C$ B. $\cos \frac{1}{x} + C$ C. $-\sin \frac{1}{x} + C$ D. $\sin \frac{1}{x} + C$

5. 对反常积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$, 下列结论正确的是 ()

- A. $p=1$ 时该反常积分收敛 B. $p>1$ 时该反常积分收敛
C. $p \leq 1$ 时该反常积分发散 D. $p<1$ 时该反常积分收敛

6. 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则 () .

- A. $a = -3, b = 2, c = -1$ B. $a = 3, b = 2, c = -1$
C. $a = -3, b = 2, c = 1$ D. $a = 3, b = 2, c = 1$

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 函数 $f(x) = x - \ln(1+x)$ 在区间 _____ 上单调减少;

2. 函数 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____, 其定义域为 _____

3. 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 _____

4. 设 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上为偶函数, 则 $\int_{-2}^2 x[x + f(x)]dx =$ _____

5. 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{3}} =$ _____;

6. 若 $f(x) = \begin{cases} b(1 + \sin x) + a + 2, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $a =$ _____ $b =$ _____;

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及文字说明）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos(t^2) dt}{1 - \cos x}$

2. 求不定积分 $\int \sqrt{x} \ln x dx$

3. 求定积分 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$

4. 设方程 $x^y = y^x$ 确定的函数 $y = y(x)$, 求 y'

5. 设 $y = \operatorname{arccot} \frac{x-1}{x+1}$, 求 dy

6. 求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = 2x + 3$ 的通解

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分为 14 分）

1. 经过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，该曲线 $y = \ln x$ 与切线及 x 轴围成的平面图形为 D 。求：

- (1) D 的面积
- (2) D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积

2. 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$ ，曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ ， x 轴所围区域的面积恒为 4，且 $f(0) = 2$ ，求 $f(x)$ 的表达式

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且满足 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$ ，证明：至少存

在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $f'(\xi) = 0$ 。（本题 4 分）

2、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，且 $f''(x) > 0$ ，证明： $f(x) \geq x$

3 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题只有一项符合要求，请把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ 的值是（ ）

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. ∞ D. 不存在

2、设 $f(x) = \begin{cases} (x+2)\cos\frac{1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ （ ）

- A. 在点 $x = \pm 2$ 都连续 B. 在 $x = 2$ 连续，在点 $x = -2$ 间断
C. 在点 $x = \pm 2$ 都间断 D. 在 $x = 2$ 间断，在点 $x = -2$ 连续

3、设由方程组 $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 确定了 y 是关于 x 的函数，则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0} =$ （ ）

- A. $-\frac{e^y}{2}$ B. $-2e$ C. $-\frac{1}{2e}$ D. $\frac{1}{2e}$

4、下列等式中正确的是（ ）

A. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x) dx = f(x)$ B. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$

C. $\frac{d}{dx} \int_x^b f(x) dx = f(x)$ D. $\int f'(x) dx = f(x)$

5、设

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx, \text{ 则}$$

（ ）

- A. $P < M < N$ B. $M < P < N$ C. $P < N < M$ D. $kN < M < P$

6、已知二阶微分方程 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$ ，则其特解为（ ）

- A. $e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$ B. $ae^{-x} \cos x + bxe^{-x} \sin x$
C. $xe^{-x}(a \cos x + b \sin x)$ D. $axe^{-x} \cos x + be^{-x} \sin x$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、若 $f(x) = \begin{cases} (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \ln(1+x) + k, & x \geq 0 \end{cases}$ 处处连续，则 $k =$ _____.

2、 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则 $dy =$ _____.

3、 $y = 4x - \frac{1}{x} (x > 0)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数为_____.

4、设 $\int f(x) dx = xe^x - e^x + C$ ，则 $\int f'(x) dx =$ 的_____.

5、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\frac{\sin t}{t} - 1 \right) dt =$ _____.

6、 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} =$ _____.

三、解答题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \right) \left(\sqrt{1+\sin 2x} - 1 \right)}$.

2、求 $f'(x)$ ，其中 $f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & x > 0 \\ x^2 + x, & x \leq 0 \end{cases}$.

3、求不定积分 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$.

4、求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.

5、已知 $f(x)$ 的原函数为 $(1 + \sin x) \ln x$ ，求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx$.

6、求微分方程 $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, y|_{x=0} = 1$ 的特解.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分，应写出具体解题过程）

1、求函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线。

2、在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线，若过点 A 作的切线与曲线 $y = x^2$ 及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$ ，求该平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V。

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且过两点 $(0, f(0))$ 与 $(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于 $(c, f(c))$ ，其中 $0 < c < 1$ ，试证：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f''(\xi) = 0$ 。

2、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：
$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

4 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题只有一项符合要求，请把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、设函数 $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处下列叙述错误的是（ ）

A. $k > 0$ 时连续 B. $k > 1$ 时连续不可导 C. $k > 1$ 时可导 D. $k > 2$ 时导函数连续

2、设 e^{-2x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x) =$ （ ）

A. $-8e^{-2x}$ B. $-4e^{-2x}$ C. $4e^{-2x}$ D. $2e^{-2x}$

3、若 $f(x)$ 在点 a 的领域内有定义，且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = 2$ ，则下列结论正确的是（ ）

A. $f(x)$ 在点 a 的领域内单调增加 B. $f(x)$ 在点 a 的领域内单调减少
C. $f(a)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值 D. $f(a)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值

4、已知 $\int_1^x f(t^2) dt = x^3$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} =$ （ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

5、若积分 $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛，则 k 满足（ ）

A. $k < 1$ B. $k > 1$ C. $k = 0$ D. $k = e$

6、微分方程 $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ 的通解为（ ）

A. $\frac{x^3}{3} + xy^2 = C$ B. $\frac{x^3}{2} + xy^2 = C$ C. $x^3 + xy^2 = C$ D. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = C$

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、 $\int_{-3}^3 (x + \sqrt{9-x^2}) dx =$ _____.

2、函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数是_____个。

3、若 $f'(e^x) = 1 + x$ ，则 $f(x) =$ _____.

4、微分方程 $dy - 2xy^2 dx = 0$ 满足条件 $y(1) = -1$ 的特解为_____.

5、设参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ ，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处切线的斜率为_____.

6、反常积分 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$ _____.

三 计算题（本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1+t)e^t dt}{x \ln(1+x)}$.

2 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$ ，其中 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

3 求不定积分 $\int e^{2\sqrt{x}} dx$.

4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

5、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定，求 dy .

6、已知 $2x \int_0^1 f(x) dx + f(x) = \ln(1+x^2)$ ，求 $\int_0^1 f(x) dx$.

四 综合题（本题 8 分，应写出具体解题过程）

在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$ ，试求：（1）切点 A 的坐标；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

五 证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1、证明：若 $f(x)$ 为连续的奇函数，则 $\int_0^x f(t) dt$ 是偶函数。

2、设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且有 $f(2) = 5f(0)$ 。试证明：在 $(0, 2)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $(1 + \xi^2)f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$ 。

5 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 函数 $y = x - \ln(1 + x^2)$ 在定义域内()
- (A) 无极值 (B) 极大值为 $1 - \ln 2$ (C) 极小值为 $1 - \ln 2$ (D) $f(x)$ 非单调函数
2. 当 $x \rightarrow 0$, 则 $x \sin x$ 是 $\ln(1 + x)$ 的()
- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 同阶无穷小 (D) 等价无穷小.
3. 对反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$, 下列结论正确的是()
- (A) $p > 1$ 时收敛 (B) $p < 1$ 时发散 (C) $p = 1$ 时收敛 (D) $p \geq 1$ 时发散
4. 已知 $\int f(x) dx = xe^x - e^x + C$, 则 $\int f'(x) dx = ()$
- (A) $xe^x - e^x + C$ (B) $xe^x + e^x + C$
- (C) $xe^x + C$ (D) $xe^x - 2e^x + C$
5. 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$, $(0 \leq x \leq 2)$ 与 x 轴所围成图形的面积可表示为()
- (A) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$ (B) $\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$
- (C) $\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$ (D) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$
6. 设 $f'(\ln x) = 1 + x$, 则 $f(x) = ()$
- (A) $x + e^x + C$ (B) $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ (C) $\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ (D) $e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{e^x - 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$, 当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $f(x)$ 连续
3. 等边双曲线 $xy = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(2x) dx =$ _____

5. 设 $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$, 则 $dy =$ _____

6. 积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{t}} dt =$ _____

三、解答题 (本题共 4 小题, 每小题 6 分, 满分 24 分, 应写出演算过程及文字说明)

1. 求不定积分 $\int x e^x dx$

2. 计算定积分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$

3. 求曲线 $y = x \ln y$ 在点 $\left(\frac{e^2}{2}, e^2\right)$ 处的切线方程和法线方程

4. 求微分方程 $y'' + y = e^x + \cos x$ 的通解

四、综合题（第 1、2 题分别为 9 分，第 3、4 题分别为 5 分，满分为 28 分）

1. 设 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$ ，又与 x 轴及 $x=1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$ ，试确定 a, b, c 的值，使此图形绕 x 轴旋转一周的体积最小

2. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ ，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，在 $(0, a)$ 内可导，且 $f(a) = 0$ ，证明存在一点 $\xi \in (0, a)$ ，使 $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$ 。

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ， $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$ ， $x \in [a, b]$ 证明：

(1) $F'(x) \geq 2$ (2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 有且仅有一根。

6 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（单选，每小题 4 分，共 6 小题，共 24 分）

- 1 函数 $y = \int_0^{x^2} (t-1)e^t dt$ 有极大值点（ ）
(A) $x=1$ (B) $x=-1$ (C) $x=\pm 1$ (D) $x=0$
- 2 设 $f(x) = 3x^2 + x|x|$ ，使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为（ ）
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 3 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$ ，则 $\int 2xf(x)dx =$ （ ）
(A) $2x \cos 2x - \sin 2x + C$ (B) $2x \sin 2x - \cos 2x + C$
(C) $2x \sin 2x + \cos 2x + C$ (D) $2x \cos 2x + \sin 2x + C$
- 4 设函数 $f(x)$ 具有连续的导数，则以下等式中错误的是（ ）
(A) $\frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x) dx \right) = f(x)$ (B) $d \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x) dx$
(C) $d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$ (D) $\int f'(t) dt = f(t) + C$
- 5 反常积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ （ ）
(A) 发散 (B) 收敛于 1 (C) 收敛于 1/2 (D) 收敛于 -1/2
- 6 微分方程 $y''' = \sin x$ 的通解是（ ）
(A) $y = \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ (B) $y = \cos x + C$
(C) $y = \sin x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ (D) $y = 2 \sin 2x$

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) =$ _____。

2 曲线 $y = x \ln x$ 上在点_____处的切线与直线 $x - y + 1 = 0$ 平行。

3 曲线 $y = \frac{x^2}{3x+1}$ 的斜渐近线方程_____。

4 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

5 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot (\sin x + 1) dx =$ _____。

6 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为_____

_____。
三 计算题（每题 5 分，共 30 分，写出必要的演算推理过程才能得分）

1 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$.

2 已知函数 $y = x^{\sin x} (x > 0)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$.

3 计算不定积分 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

4 计算定积分 $\int_1^e \frac{1}{x(2 + \ln^2 x)} dx$.

5 计算星形线 $x = a \sin^3 t, y = a \cos^3 t (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$ 的全长。

6 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} + 2x$ 的通解。

四 综合题（第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分，写出必要的演算推理过程才能得分）

1 求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 24x - 19$ 在拐点处的切线方程与法线方程。

2 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0,0)$ ，且当 $x \in [0,1]$ 时， $y \geq 0$. 试确定 a, b, c 的值，使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $4/9$ ，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小。

五 证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1 设 $f''(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，试用分部积分法证明：

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ，试证明至少

存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=1$ 。

7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题每小题 4 分，共 6 小题，共计 24 分，除标注外为单选题）

1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且 $f(x) > g(x)$ ，则必有（ ）（多选）

A $f(-x) > g(-x)$

B $f'(x) > g'(x)$

C $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

D $\int_0^x f(t)dt > \int_0^x g(t)dt$

2 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义，在开区间 (a, b) 内可导，则（ ）

A 对任何 $\xi \in (a, b)$ ，有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$

B 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时，存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f(\xi) = 0$

C 当 $f(a) = f(b)$ 时，存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f'(\xi) = 0$

D 存在 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

3 设 $f(x)$ 连续，则在下列变上限积分定义的函数中，必为偶函数的是（ ）

A $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$

B $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$

C $\int_0^x f(t^2)dt$

D $\int_0^x [f(t)]^2 dt$

4 设 $f(x)$ 可导，且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ ，则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 点处的微分 dy 是（ ）

A 与 Δx 等价的无穷小

B 与 Δx 同阶的无穷小

C 比 Δx 低阶的无穷小

D 比 Δx 高阶的无穷小

5 曲线 $y = e^{-x} \sin x (0 \leq x \leq 3\pi)$ 与 x 轴所围成的面积可表示为（ ）

A $-\int_0^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$

B $\int_0^{2\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$

C $\int_0^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$

D $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx$

6 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$ ， C 为任意常数，则方程的通解是（ ）

A $C[y_1(x) - y_2(x)]$

B $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$

C $C[y_1(x) + y_2(x)]$

D $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

二 填空题（本题每小题 4 分，共 6 小题，共计 24 分）

1 已知 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ，则 $y'' =$ _____

2 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解是 _____

3 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ -1 & (x > \frac{1}{2}) \end{cases}$, 则 $\int_1^2 f(x^{-1})dx =$ _____

4 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$

5 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____

6 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_____

三 计算题（每题 5 分，共 6 题，共计 30 分）

$$1 \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^3} \qquad 2 \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2}$$

3 求曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (其中 $a > 0$, 且为常数) 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程。

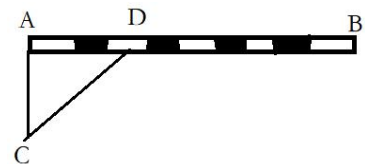
4 计算积分 $\int_0^1 x e^{-x} dx$

5 求曲线 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ (其中 $a > 0$, 且为常数) 相应于 $0 \leq t \leq \pi$ 的一段弧的长度。

6 求微分方程 $\frac{dx}{dy} + 2xy = 4x$ 的通解。

四 数学建模题。（本题 6 分）

铁路线 AB 之间的距离为 100km，工厂 C 距 A 处为 20km，AC 垂直于 AB（如下图所示），为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3: 5，为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处？



五 解答题（本题 8 分）

设曲线 $y = ax^2 (x \geq 0, \text{且} a > 0)$ 与曲线 $y = 1 - x^2$ 交于点 A . 过原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形 D , 求

- (1) D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$;
- (2) 求 a 的值, 使得 $V(a)$ 最大。

六 证明题。（每题 4 分，共 2 题，共计 8 分）

1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx$, 证明 $\exists \xi \in (0,2), \text{s.t. } f(\xi) = f(0)$

2 设 $f(x)$ 是连续函数, 证明 $\int_0^x (\int_0^u f(t)dt)du = \int_0^x f(t)(x-t)dt$

8 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$ ，则 $f(x)$ 的一个原函数是（ ）

- (A) $1 + \sin x$ (B) $1 - \sin x$ (C) $1 + \cos x$ (D) $1 - \cos x$

2 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在左、右导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点（ ）

- (A) 可导 (B) 不可导 (C) 连续 (D) 不连续

3 设周期函数 $f(x)$ 在实数集 \mathbf{R} 内可导，周期为 4，又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ ，则曲线

$y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处切线斜率为（ ）

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) -1 (D) -2

4 下列各式正确的是（ ）

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{x - 1} = 2$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} = 1$, (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$, (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e$

- (A) (2) (B) (1) (C) (1) (3) (D) (1) (2) (3)

5 对反常积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ ，下列结论正确的是（ ）

- (A) $p = 1$ 时该反常积分收敛 (B) $p > 1$ 时该反常积分收敛
(C) $p \leq 1$ 时该反常积分发散 (D) $p < 1$ 时该反常积分收敛

6 微分方程 $y'' + 2y' - 3y = e^x \sin x$ 的一个特解应具有形式（ ）

- (A) $ae^x \sin x$ (B) $axe^x \sin x$ (C) $xe^x(a \sin x + b \cos x)$ (D) $e^x(a \sin x + b \cos x)$

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1 在抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上曲率最大的点为_____。

2 假设函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 点可导，则 $a =$ _____, $b =$ _____。

3 设 $y = x^2 + 6x - 4$ ，那么在区间 $(-\infty, -3)$, $(0, +\infty)$ 内，函数分别是单调_____、_____（填增加或减少）

4 设 $y = 3e^x \cos x$ ，则函数的微分 $dy =$ _____。

5 定积分 $\int_{-1}^1 (x^2 + x\sqrt{1-x^2}) dx =$ _____。

6 已知 $F(x)$ 是 $\cos x$ 的一个原函数， $F(0) = 0$ ，则 $\int xF(x) dx =$ _____。

三 解答题（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right]$

2 求不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

3 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定，求使得曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围

4 若函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ ，求定积分 $\int_0^2 f(x) dx$ 。

四 求函数 $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ 的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出草图。（本题 9 分）

五 综合题（本题满分 11 分，第一题 5 分，第二题 6 分）

1 设光滑曲线 $y = \varphi(x)$ 过原点，且当 $x > 0$ 时 $\varphi(x) > 0$ ，对应于 $[0, x]$ 一段曲线的弧长为 $e^x - 1$ ，求 $\varphi(x)$ 。

- 2 设 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又与 x 轴及 $x = 1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a, b, c 的值, 使此图形绕 x 轴旋转一周的体积最小。

六 证明题 (本题共 2 小题, 每题 4 分, 满分 8 分)

- 1 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$, 并由此计算该积分值。

- 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$, $x \in [a, b]$, 证明: (1)

$F'(x) \geq 2$; (2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个根。

9 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 A 卷

一 选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$, $g(x) = \sin x - x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 成立 ()
A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小
B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小
C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小
D. $g(x)$ 是比 $f(x)$ 高阶的无穷小
2. 若 $f(x)$ 是奇函数且 $f'(0)$ 存在, 则 $x=0$ 是函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 的 ()
A. 可去间断点
B. 无穷间断点
C. 连续点
D. 振荡间断点
3. 设 $f(x)$ 是方程 $y'' + 2y' + 4y = 0$ 的一个特解, 如果 $f(x_0) < 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处 ()
A. 取极大值
B. 取极小值
C. 某领域内单调增
D. 某领域内单调减
4. 设积分族 $y = \int f(x) dx$ 中有倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线, 则 $y = f(x)$ 的图形是 ()
A. 平行于 y 轴的直线
B. 抛物线
C. 平行于 x 轴的直线
D. 直线 $y=x$
5. 对反常积分 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, 下列结论正确的是 ()
A. $p=1$ 时该反常积分收敛
B. $p \geq 1$ 时该反常积分发散
C. $p > 1$ 时该反常积分收敛
D. $p < 1$ 时该反常积分收敛
6. 平面曲线 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 的弧长为 ()
A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos x} dx$
B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx$
C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{\cos x}} dx$
D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{\cos x}} dx$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 若 $f(x) = \begin{cases} b(1 + \sin x) + a + 2, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

2. 已知 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 则 $\frac{d^2x}{dy^2} =$ _____;

3. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2}) dx =$ _____;

4. 函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调递增区间是 _____;

5. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx =$ _____;

6. 一阶线性微分方程 $xy' + y = \sin x$ 的通解为 _____.

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$.

2. 设曲线方程 $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$, 求曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程.

3. 求不定积分 $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

4. 计算定积分 $\int_{-2}^2 (x + |x|)e^{|x|} dx$

5. 求微分方程 $y'' + y = e^x + \cos x$ 的通解

四、综合题（本题满分 8 分）

设曲线方程为 $y = e^{-x} (x \geq 0)$ (1) 把曲线 $y = e^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x = c (c > 0)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周得旋转体, 求此旋转体的体积 $V(c)$, 并求满足 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow +\infty} V(c)$ 的 a . (2) 在此曲线上找一点, 使过该点的切线与两坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积。

五、数学建模题（本题满分 7 分）

一个煮熟了的鸡蛋有 98°C ，把它放在 18°C 的水池里，5 分钟后，鸡蛋的温度是 38°C 。
大约还需要几分钟鸡蛋到达 20°C ？（假定物体冷却满足牛顿冷却定律：物体温度的变化率与物体温度和当时环境温度之差成正比，已知 $\ln 2 \approx 0.7, \ln 5 \approx 1.6$ ）

六、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 3 分，满分 7 分）

1 证明 $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$ ，并利用结论求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$

2 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，且 $f''(x) > 0$ ，证明： $f(x) \geq x$

10 浙江理工大学 2012-2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期末 B 卷

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 无穷小 $f(x) + g(x)$ 与

无穷小 $g(x)$ 的关系是 () 无穷小

- A. 高阶 B. 低阶 C. 同阶非等价 D. 等价

2. 设 $f(x)$ 对任何 x 满足 $f(1+x) = 2f(x)$, 且 $f(0) = 1$, $f'(0) = C$ (常数), 则 $f'(1) =$ ()

- A. $-C$ B. $2C$ C. $\frac{C}{2}$ D. 不存在

3. 设 $y = x^2 + 6x - 4$, 那么在区间 $(-\infty, -3)$ 和 $(0, +\infty)$ 内, y 分别为 ()

- A. 单调增加, 单调增加 B. 单调增加, 单调减少
C. 单调减少, 单调减少 D. 单调减少, 单调增加

4. 设 $f(x)$ 在点 $[a, b]$ 连续是 $f(x)$ 在点 $[a, b]$ 可积的 () 条件

- A. 充分非必要 B. 必要非充分 C. 充要 D. 既非充分又非必要

5. 在下列广义积分中收敛的是 ()

- A. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ B. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ D. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

6. 曲线 $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ 自 $x = 1$ 至 $x = e$ 之间的一段曲线弧的弧长为 ()

- A. $\frac{e^2 + 2}{4}$ B. $\frac{1 - e^2}{4}$ C. $\frac{e^2 + 1}{4}$ D. $\frac{e^2 - 1}{4}$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处可导, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

2. 设 $\frac{df(x)}{dx} = g(x)$, $\varphi(x) = x^3$, 则 $\frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$;

3. $\int_{-1}^1 \frac{x^7 + 2x^5 + 8x}{\cos^4 x + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}$;

4. 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[t \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2tx} \right]$, 则 $f'(t) = \underline{\hspace{2cm}}$;

5. 已知 $F(x)$ 是 $\cos x$ 的一个原函数, $F(0) = 0$, 则 $\int xF(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$;

6. 已知 $y=1$ 、 $y=x$ 、 $y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为_____.

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{\sin^2 x}$

2. 求不定积分 $\int x \tan^2 x dx$

3. $\int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx$

4. $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

5. 求微分方程 $dx + xydy = y^2 dx + ydy$ 的通解.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内大于 0，并满足

$$xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2 \quad (a \text{ 为常数}).$$

又曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 0$ ， $x = 1$ ， $y = 0$ 所围的图形 S 的面积值为 2. 求函数 $y = f(x)$ ，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小。

2. 设函数 $y = y(x)$ 满足 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ ，且其图形与抛物线 $y = x^2 - x + 1$ 在点 $(0,1)$

处有公切线，求 $y(x)$

五、证明题（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ， $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$ ， $x \in [a,b]$ ，证

明：（1） $F'(x) \geq 2$ ；（2）方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根。

高等数学试题资料目录

- 1 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）
- 2 高等数学 A1 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 3 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 4 高等数学 A1 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 5 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）**
- 6 高等数学 A1 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 7 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 8 高等数学 A1 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 9 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）
- 10 高等数学 A2 期中试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 11 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 12 高等数学 A2 期中试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 13 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（试卷册）（第二版）
- 14 高等数学 A2 期末试题汇编 1~10 套（答案册）（第二版）
- 15 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 16 高等数学 A2 期末试题汇编 11 套及以后（试卷册）（第二版）
- 17 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 18 高等数学 A1 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）
- 19 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 20 高等数学 A1 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）
- 21 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 22 高等数学 A2 期中试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）
- 23 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（试卷册）（第二版）
- 24 高等数学 A2 期末试题汇编五套精装版（答案册）（第二版）