

浙江理工大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学 A1》期中试卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：_____ 学号：_____ 班级：_____ 任课教师：_____

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | | | 四 | | 五 | | 总分 | 复核 教师 签名 |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----------------|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 1 | 2 | | |
| 得分 | | | | | | | | | | | | | |
| 阅卷 教师 签名 | | | | | | | | | | | | | |

(本试卷共 4 页)

一、选择题 (本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

1. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少， $\{b_n\}$ 单调增加，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ，则 ()

A. $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 不存在.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在.

2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时， $(x - \sin x) \tan x$ 是比 $\ln(1 + x^n)$ 高阶的无穷小，而 $\ln(1 + x^n)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 $n =$ ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，下列命题 错误 的是 ()

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$.

B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$.

C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

4. 设 $f(x)$ 二阶连续可导， $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{(x-2)^3} = \frac{2}{3}$ ，下列说法 正确 的是 ()

A. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

B. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

C. $(2, f(2))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

D. $f(2)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值， $(2, f(2))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

5. 设曲线 $L: \begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + yt + \sin t = 1 \end{cases}$, 则曲线在 $t = 0$ 处的切线方程为 ()

- A. $x + y = 1$ B. $x + y = -1$ C. $x - y = 1$ D. $x - y = -1$

6. 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是 ()

- A. $f(0), f(\frac{\pi}{2})$ 均是极大值 B. $f(0), f(\frac{\pi}{2})$ 均是极小值
C. $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值 D. $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{\sin x}} =$ _____.

2. 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 - x}$ 的第一类间断点是 _____, 它是 _____ 间断点.

3. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ _____.

4. 设 $y = (1 + x^2)^{\sin x}$, 则 $dy =$ _____.

5. 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx + 6$ 在 $x = -2$ 处取得极值, 且与直线 $y = -3x + 3$ 相切于点 $(1, 0)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

6. 设 $y = x^2 \cos x$, 则 $y^{(5)}(0) =$ _____.

三、解答题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, 其中 b 为常数, $f(x)$ 在定义域上处处可导, 求 $f'(x)$.

4. 已知函数 $y = f(x) = x + e^x$, 其反函数为 $x = f^{-1}(y)$, 求 $\left. \frac{d^2x}{dy^2} \right|_{y=1}$.

5. 计算由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分）

1. 已知函数 $f(u)$ 可导, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设

$z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$.

2. 求函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点及渐近线.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1. 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 1$.