离散数学概论

第五章 图的表示与应用

课程QQ号： 689423416

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

知识回顾

- 无向图与有向图
- 握手定理
- 图的同构
- 通路与回路（3种）
- 连通性（3种）
- 割集（2类）

1.6 <u>矩阵表示</u>

1.7 路径

1.8 图的着色

1.9 匹配

§6 矩阵表示

一、 邻接矩阵

二、 可达矩阵

三、 关联矩阵

四、 连通性与矩阵关系

❖邻接矩阵

【定义】 $D=\langle V,E\rangle$为有向图， 顶点集$V=\{v_1,v_2,\ldots\ldots,v_n\}$,V中的结点按下标由小到大编序,构造n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}\text{m, 若存在m条}v_i\text{到}v_j\text{直接相连的有向边}\\ \text{0, 若不存在}v_i\text{到}v_j\text{直接相连的有向边}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\ldots\ldots,n)$$

则称A为有向图D的邻接矩阵, 记为$A(D)$.

一. 邻接矩阵

❖邻接矩阵

【定义】 $G=<V,E>$为无向图，顶点集$V=\{v_1,v_2,\ldots\ldots,v_n\}$，$V$中的结点按下标由小到大编序，构造n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{直接相连}\\0, & v_i\text{与}v_j\text{不直相连的有向边}\end{cases}\quad (i,j=1,2,\ldots\ldots,n)$$

则称A为有向图G的邻接矩阵，记为$A(G)$.

邻接矩阵与结点编序有关：

同一个图形结点编序不同得到的邻接矩阵不同，但是表示的都是同一张图．也就是说这些结点不同编序得到的图都是同构的，同时它们的邻接矩阵也是相似的．

❖邻接矩阵的性质

(1) 零图的邻接矩阵的元素全为零，并称它为**零矩阵**.

(2) 图的每一结点都有自回路而再无其他边时，则该图的邻接矩阵是**单位矩阵**.

(3) 简单图的邻接矩阵主对角元素全为零.

(4) 若设简单图D的邻接矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则它的补图$\overline{G}$的邻接矩阵 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n}$为：

$$\overline{a}_{ij}=\begin{cases}1-a_{ij}, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases}\qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

有向图的邻接矩阵

定义 设有向图D=<V, E>, V={v_1, v_2, …, v_n}, E={e_1, e_2, …, e_m}, 令 $a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数， 称$(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$为$D$的邻接矩阵, 记作$A(D)$, 简记为$A$.

性质

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i = 1,2,\dots,n$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\quad j = 1,2,\dots,n$$

$$(3)\quad \sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m ---D\text{中长度为 1 的通路数}$$

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)} ---D\text{中长度为 1 的回路数}$$

一. 邻接矩阵

➢ **定理：** 设无向图$G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$的邻接矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}+a_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}+a_{ii}$$

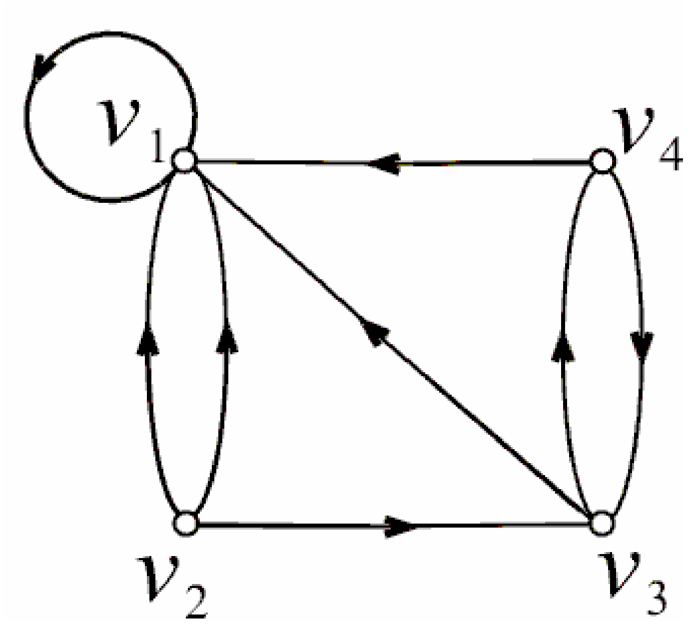
$$\sum_{i=1}^{n}deg(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}+a_{ii}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

设有向图$G=<V,E>$，$V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$的邻接矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

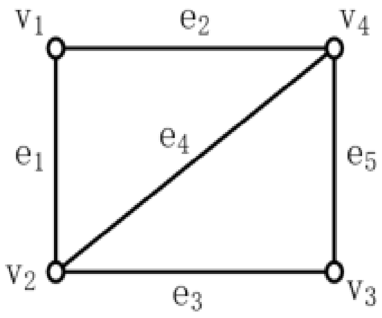
$$deg^{+}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,,\qquad deg^{-}(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}$$

有向图的邻接矩阵实例

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$



例：求下图G的邻接矩阵A。



解：邻接矩阵A求解如下：

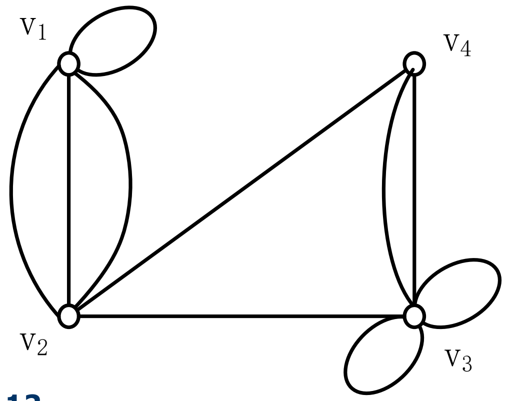
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一. 邻接矩阵

例： 画出多重图G，其邻接矩阵A如下：

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\3&0&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&0\end{bmatrix}$$

解： 由于A是4阶方阵，因而G有4个顶点，设其为v_1，v_2，v_3，v_4，在邻接矩阵$A=(a_{ij})$中，若$a_{ij}=n$，则从v_i到v_j画n条边。若$a_{ii}=n$，则v_i有n个环。该多重图如下图所示：



D中的通路及回路数

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

D中的通路及回路数(续)

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l(l\geq1)$, 则$B_l$中元素

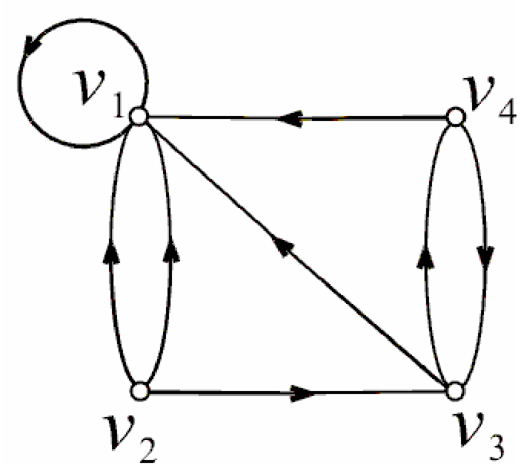
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于l 的通路数,

$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于l 的回路数.

例 问在有向图D中

(1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?

(2) 长度小于或等于4的通路为多少条? 其中有多少条回路?



例(续)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

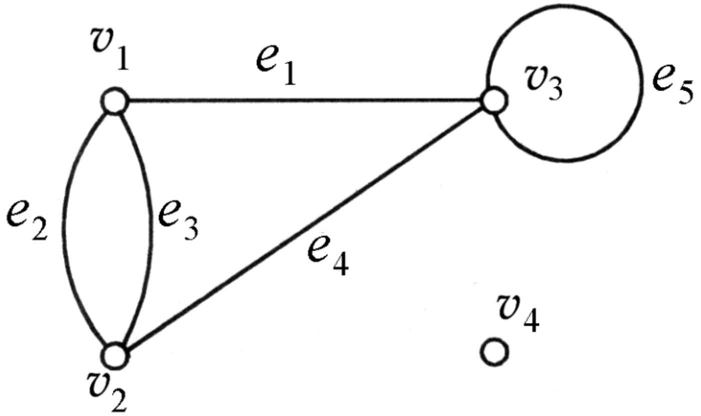
长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

无向图的关联矩阵

定义 设无向图G=<V,E>, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为**$G$的关联矩阵**，记为$M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质 (1) 每一列恰好有两个1或一个2

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) v_i为孤立点当且仅当第i行全为0

(5) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

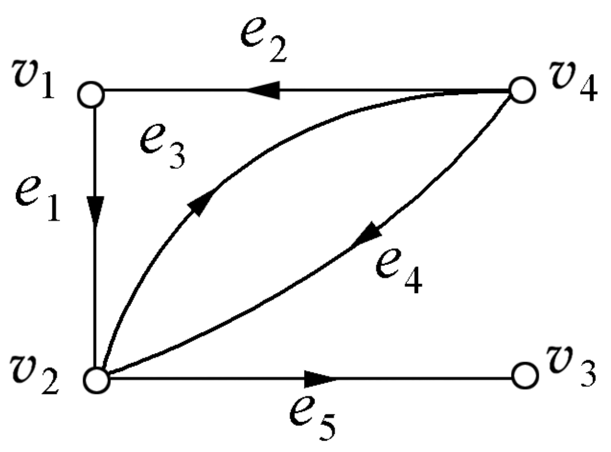
$$m_{ij} = \begin{cases} 1\ , & v_i\text{为}e_j\text{的始点} \\ 0\ , & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1\ , & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

有向图的关联矩阵(续)

例

$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

(1) 每一列恰好有一个1和一个-1

(2) 第i行1 的个数等于$d^+(v_i)$, -1 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1的总个数等于-1的总个数, 且都等于m

(4) 平行边对应的列相同

有向图的可达矩阵

定义 设$D=<V,E>$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D**的可达矩阵**, 记作$P(D)$, 简记为P.

性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

二. 可达矩阵

从图G的邻接矩阵A可以得到可达矩阵P,即令$B_n=A+A^2+A^3+\ldots\ldots+A^n$，再把$B_n$中非零元素改为1，零元素不变，这种变换后的矩阵就是可达矩阵P。

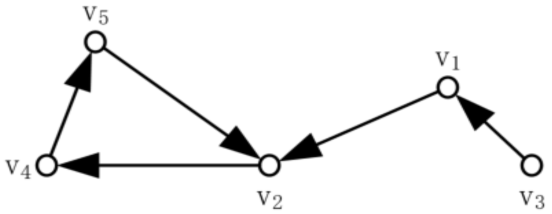
设$G=<V,E>$为线图，A、P分别是G的邻接矩阵和可达性矩阵，则有:

$$P=A^{(1)}\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee\cdots\vee A^{(n)}=\bigvee_{i=1}^{n}A^{(i)}$$

这里，$A^{(i)}$表示i个A进行布尔乘法。

二. 可达矩阵

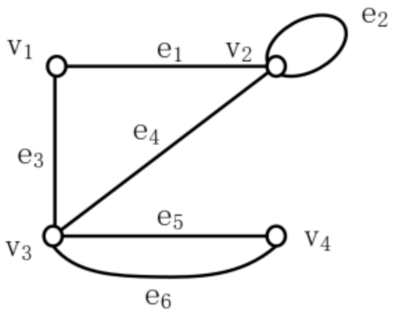
例： 求下图的邻接矩阵和可达性矩阵。



解： 邻接矩阵$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$，**可达性矩阵为**$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$， $A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

$A^4=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$, $A^5=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$, $P=A\vee A^2\vee A^3\vee A^4\vee A^5=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}$。

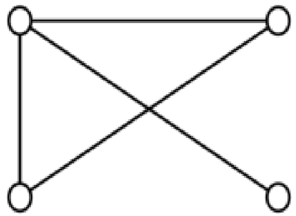
例：求下面多重图的邻接矩阵A和关联矩阵M。



解：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$； $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

三. 可达矩阵

例：求下图G的邻接矩阵A和关联矩阵M。



解：这两个矩阵与顶点和边的排列次序有关。

一种排列次序得到下面的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

四. 连通性与矩阵关系

❖连通性与矩阵关系：

- 无向线图G是连通图当且仅当它的可达性矩阵P的所有元素都均为1;
- 有向线图D是强连通图当且仅当它的可达性矩阵P的所有元素都均为1;
- 有向线图D是单向连通图当且仅当它的可达性矩阵P及其转置矩阵P^T经布尔运算加后所得矩阵$P' = P \vee P^T$中除对主角元外的其余元素均为1;
- 有向线图D是弱连通图当且仅当它的邻接矩阵A及其转置矩阵A^T经布尔加运算后所得矩阵$B = A \vee A^T$作为邻接矩阵而求出的可达性矩阵P'中所有元素均为1.

1.6 矩阵表示

1.7 路径

1.8 图的着色

1.9 匹配

§ 7 路径

一、 最短路径

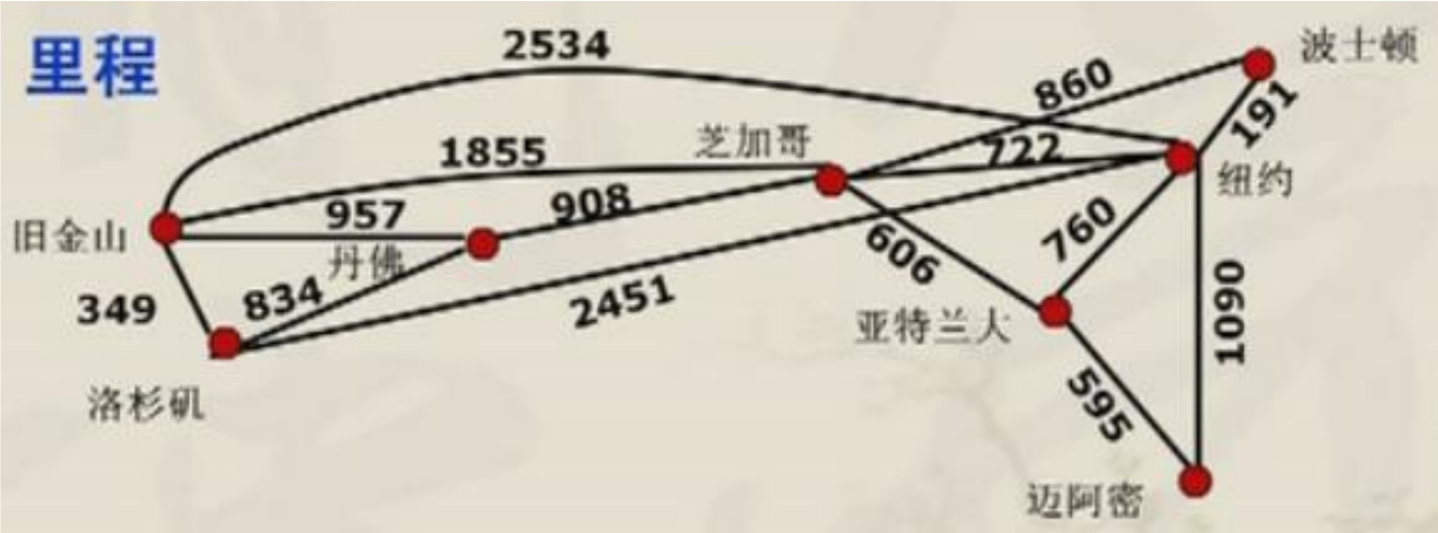
二、 Dijkstra算法

三、 拓扑排序和关键路径

一. 最短路径

❖给边赋权值的图来建模

● 航线系统建模



➢ 计算从波士顿到洛杉矶之间空中距离**最短**的通路？

一. 最短路径

❖基本概念

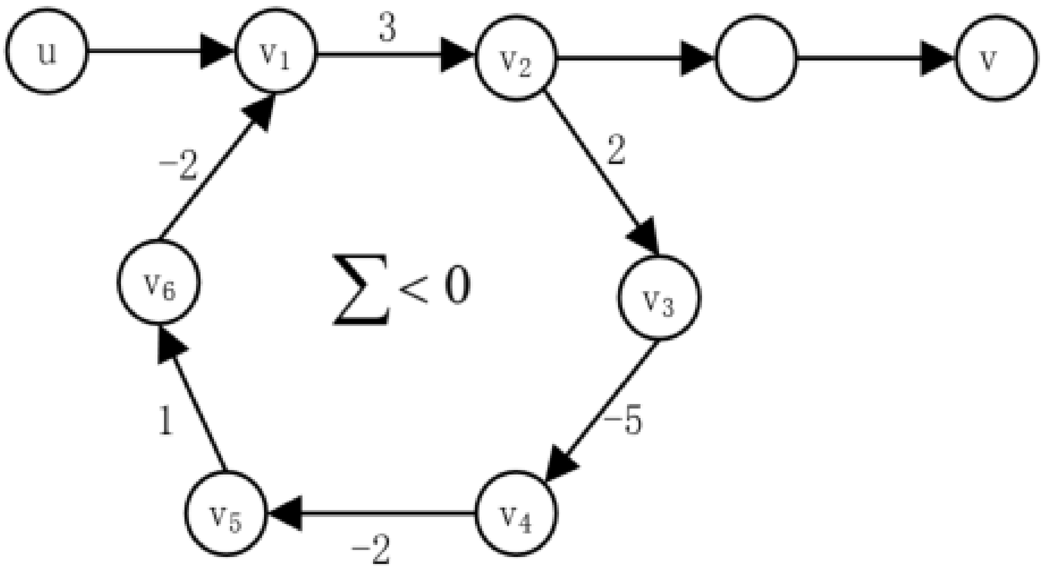
- **带权图**：给每条边赋值权值为一个数的图.
- **一条路径的长度**：若p:$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots v_k$ 表示带权图v_1到v_k的一条路径，p的权值为该路径经过的所有边的权值总和，记为w(p).
- **最短路径**：若p为从u到v的一条路径,使w(p)最小,此时的p就是最短路径. 最短路径的权值为$\delta(u, v)=\min\{w(p)\}$

一. 最短路径

最短路径可能不存在：

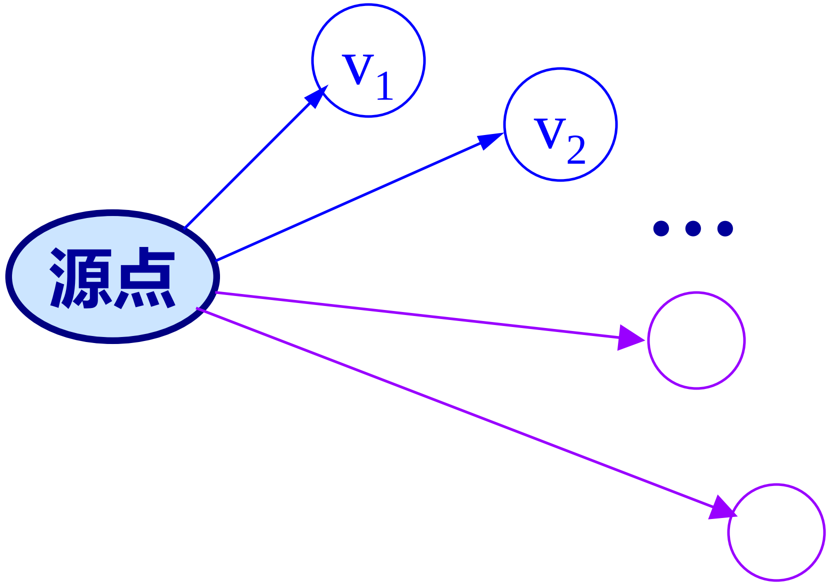
（1）存在负权回路（如下图），

（2）不存在从u到v的路径，肯定也不存在最短路径.



❖求从源点到其余各点的最短路径的算法的基本思想：

- 依最短路径的长度递增的次序求得各条路径



其中，从源点到顶点v_1的最短路径是所有最短路径中长度最短者.

一. 最短路径

❖ 求从源点到其余各点的最短路径的算法的基本思想：

➢ 路径长度最短的最短路径的特点：

在这条路径上，必定只含一条弧，并且这条弧的权值最小。

➢ 下一条路径长度次短的最短路径的特点：

它只可能有两种情况：或者是直接从源点到该点(只含一条弧)；或者是从源点经过顶点v_1，再到达该顶点(由两条弧组成)。

一. 最短路径

❖ 求从源点到其余各点的最短路径的算法的基本思想：

➢ 再下一条路径长度次短的最短路径的特点：

它可能有三种情况：或者是直接从源点到该点(只含一条弧)；或者是从源点经过顶点v_1，再到达该顶点(由两条弧组成)；或者是从源点经过顶点v_2，再到达该顶点。

➢ 其余最短路径的特点：

它或者是直接从源点到该点(只含一条弧)；或者是从源点经过已求得最短路径的顶点，再到达该顶点。

二. Dijkstra算法(*)

❖Dijkstra算法

Dijkstra算法 (1959)

设G有n个顶点；边的长度$\ell_{ij}>0$；

- 结点v_i和v_j没有边相连(不是邻接点)，则令$\ell_{ij}=\infty$,
- 对每个结点v_i，令$\ell_{ij}=0$。

二. Dijkstra算法(*)

❖Dijkstra算法

基本思想：

(1) 需要指定起点v_1(即从顶点v_1开始计算);

(2) 引进两个集合P和T.

P的作用是记录已求出最短路径的顶点(以及相应的最短路径长度),

T则是记录还未求出最短路径的顶点(以及该顶点到起点s的距离);

(3) 初始时,P中只有起点s; T中是除s之外的顶点,并且T中顶点的路径是"起点s到该顶点的路径".然后,从T中找出路径最短的顶点,并将其加入到P中;接着,更新T中的顶点和顶点对应的路径. 然后,再从T中找出路径最短的顶点,并将其加入到P中;接着,更新T中的顶点和顶点对应的路径.重复该操作,直到遍历完所有顶点.

❖Dijkstra算法

算法步骤：

■**Step1:**

初始化：将v_1置为P标号，$d(v_1)=0$，$P=\{v_1\}$，$\forall v_i(i\neq 1)$置v_i为T标号，即$T=V-P$，且

$$d(v_i)=W(v_1, v_i) \quad \text{若} v_i \text{ adj } v_i$$

$$d(v_i)=\infty \quad \text{else}$$

二. Dijkstra算法

❖Dijkstra算法

算法步骤：

■Step2:找最小

寻找具有最小值的T标号的结点。若为v_1， 则将v_1的T标号改为P标号， 且$P=P\cup\{v_l\}$， $T=T-\{v_l\}$。

❖Dijkstra算法

算法步骤：

■Step3：修改

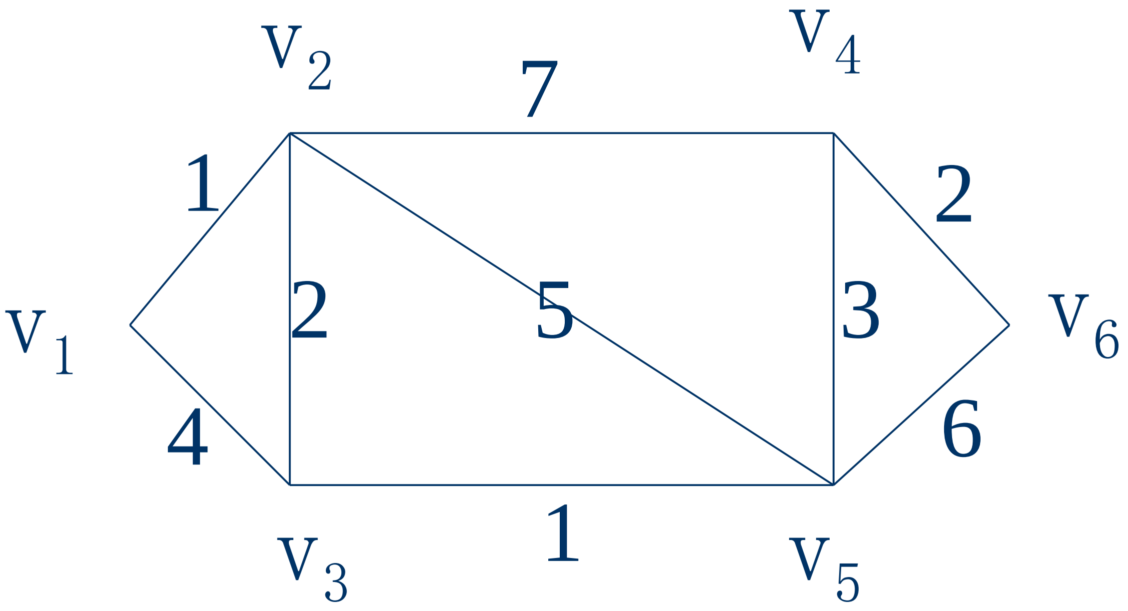
修改与v_1相邻的结点的T标号的值. $\forall v_i \in T$:

$$d(vi)=\begin{cases} d(v_l)+W(v_l,v_i) & \text{若} d(v_l)+W(v_l,v_i)<d(v_i) \\ d(v_i) & \text{否则} \end{cases}$$

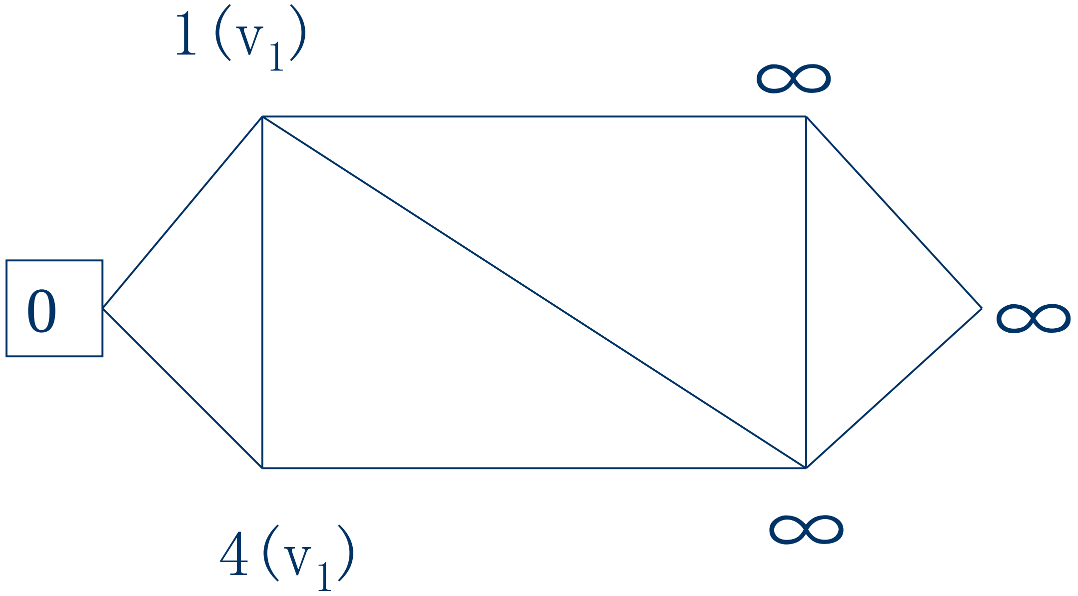
■Step4：重复（2）和（3），直到v_n改为P标号为止。

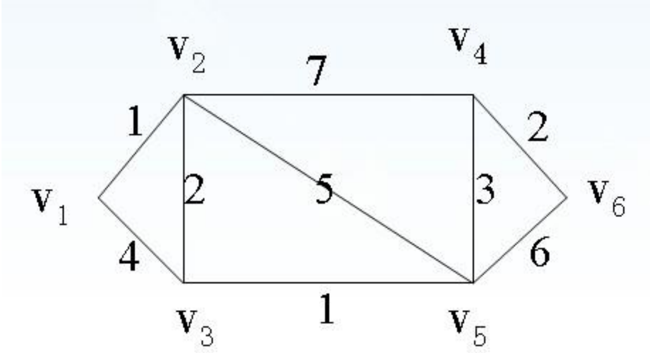
二. Dijkstra算法(*)

例：试求无向赋权图中v_1到v_6的最短路径



二. Dijkstra算法(*)

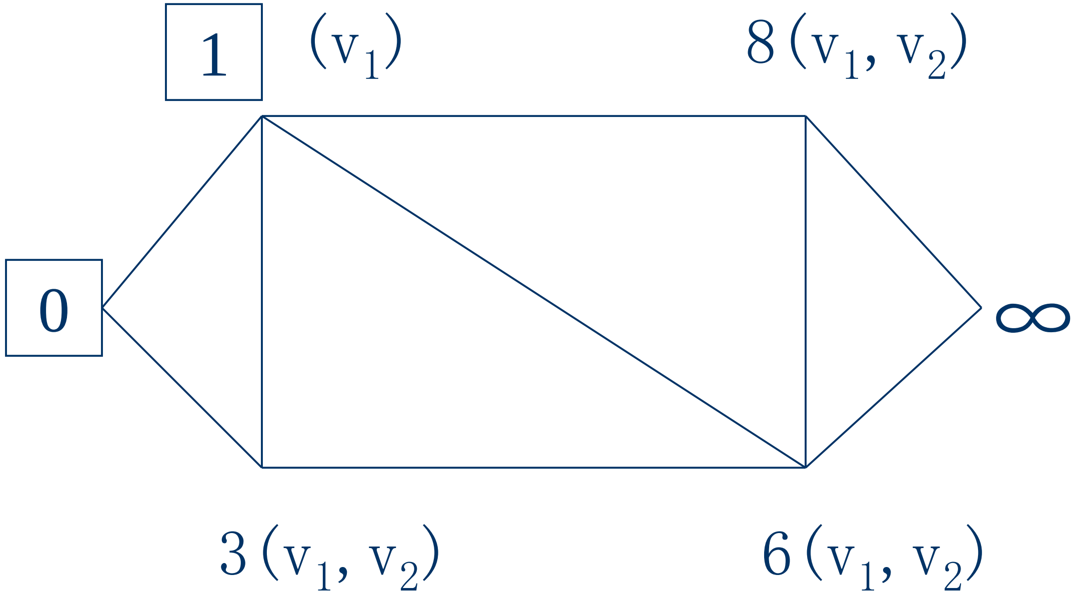


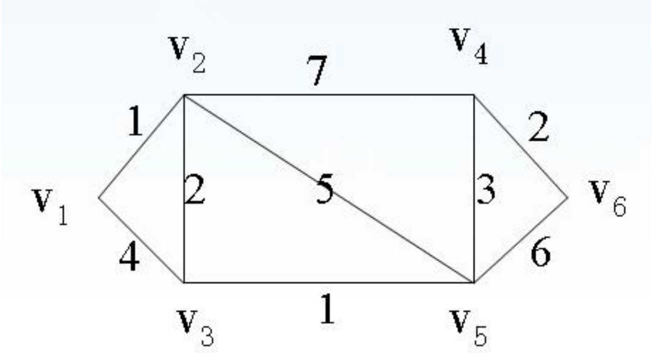


$P=\{v_1\}$

$T=\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

二. Dijkstra算法(*)

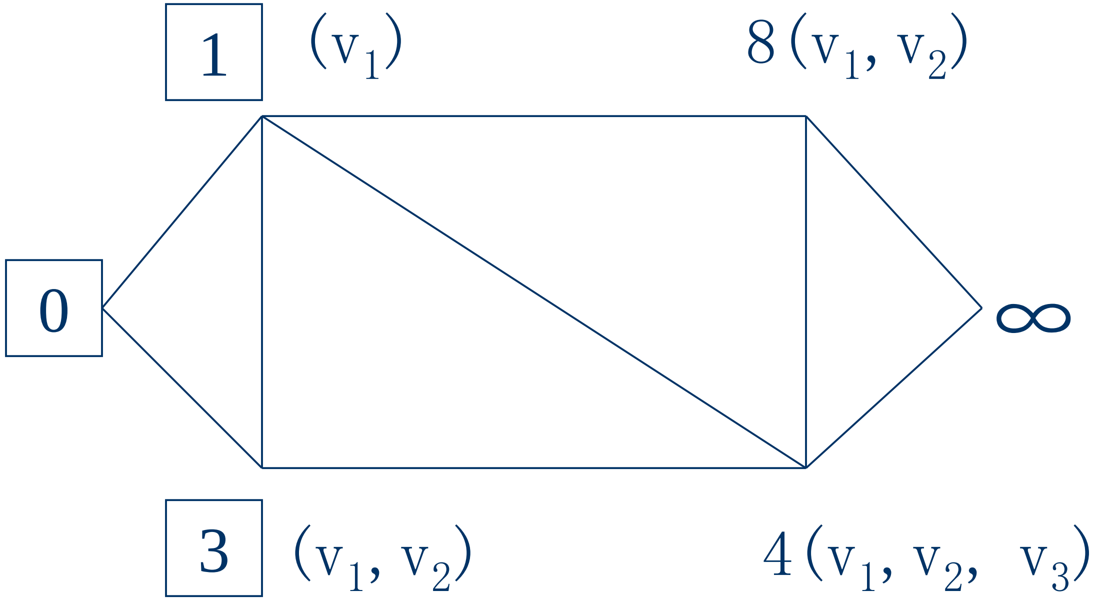




$P=\{v_1,v_2\}$

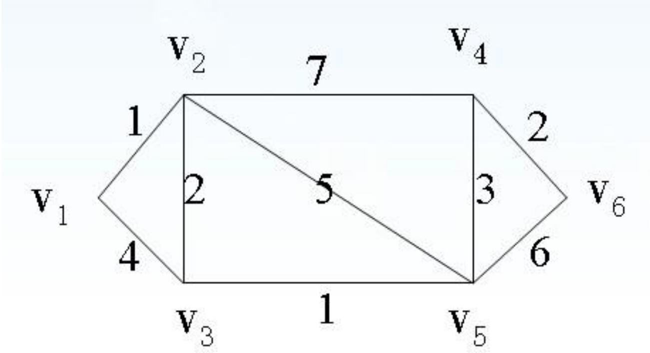
$T=\{v_3,v_4,v_5,v_6\}$

二. Dijkstra算法(*)

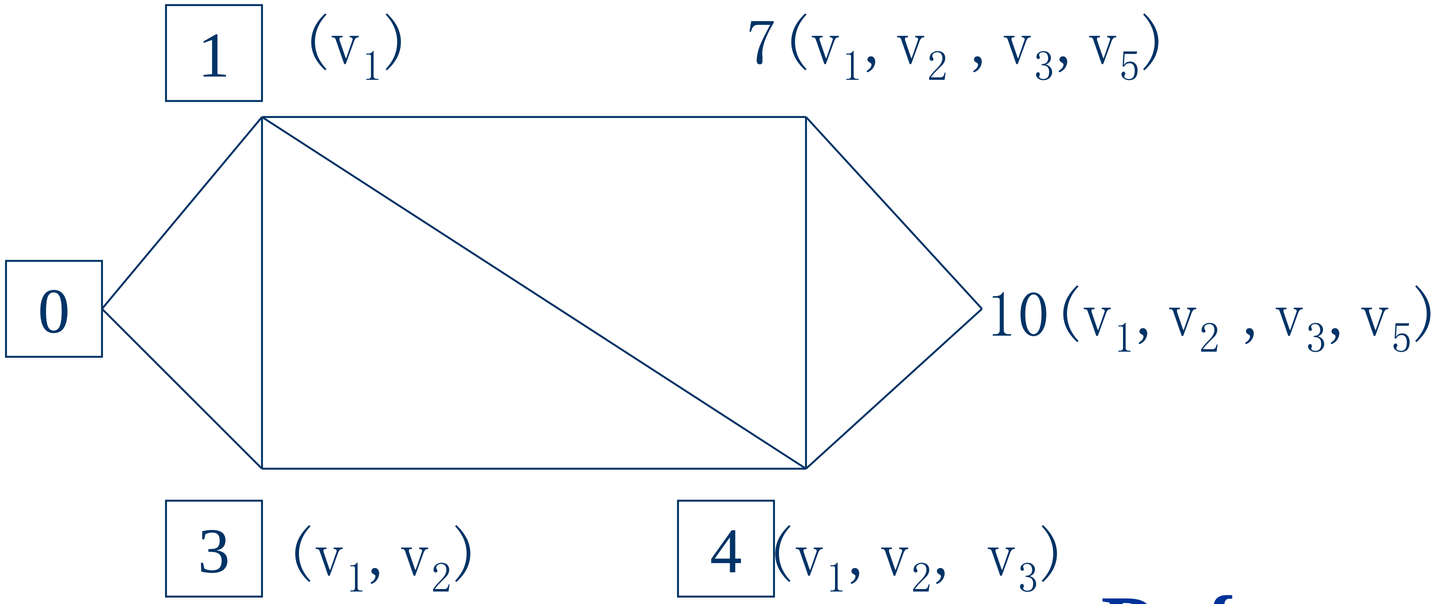


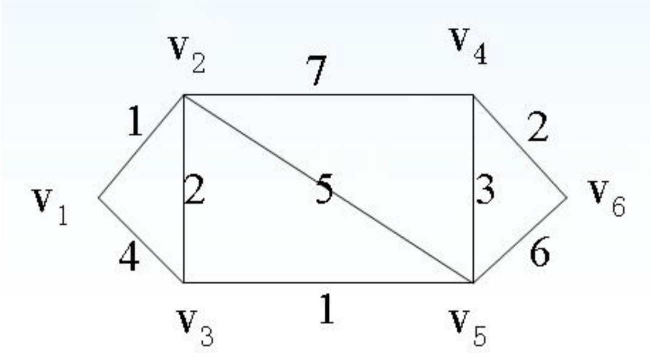
$P=\{v_1,v_2,v_3\}$

$T=\{v_4,v_5,v_6\}$



二. Dijkstra算法(*)

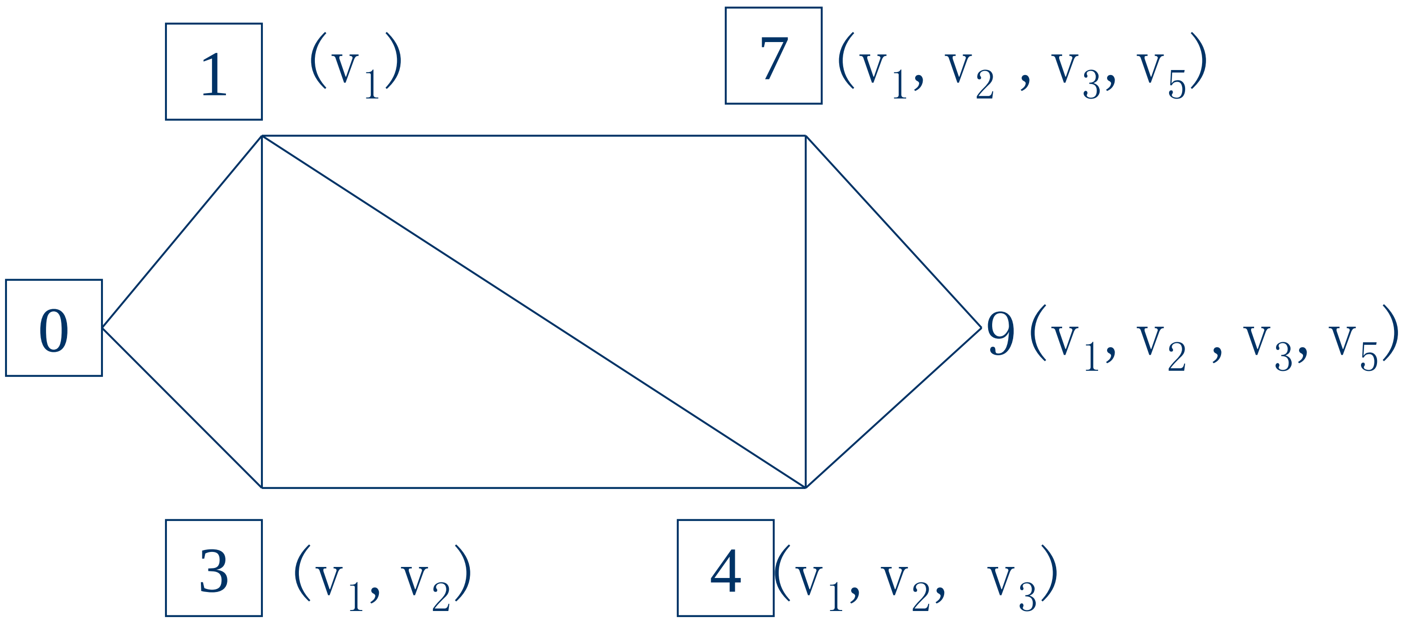


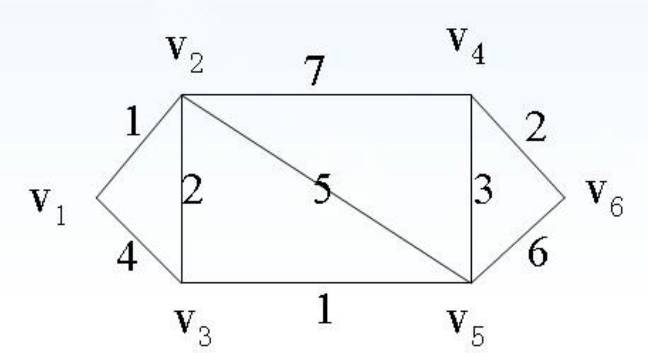


$P=\{v_1,v_2 , v_3, v_5\}$

$T=\{v_4,v_6\}$

二. Dijkstra算法(*)

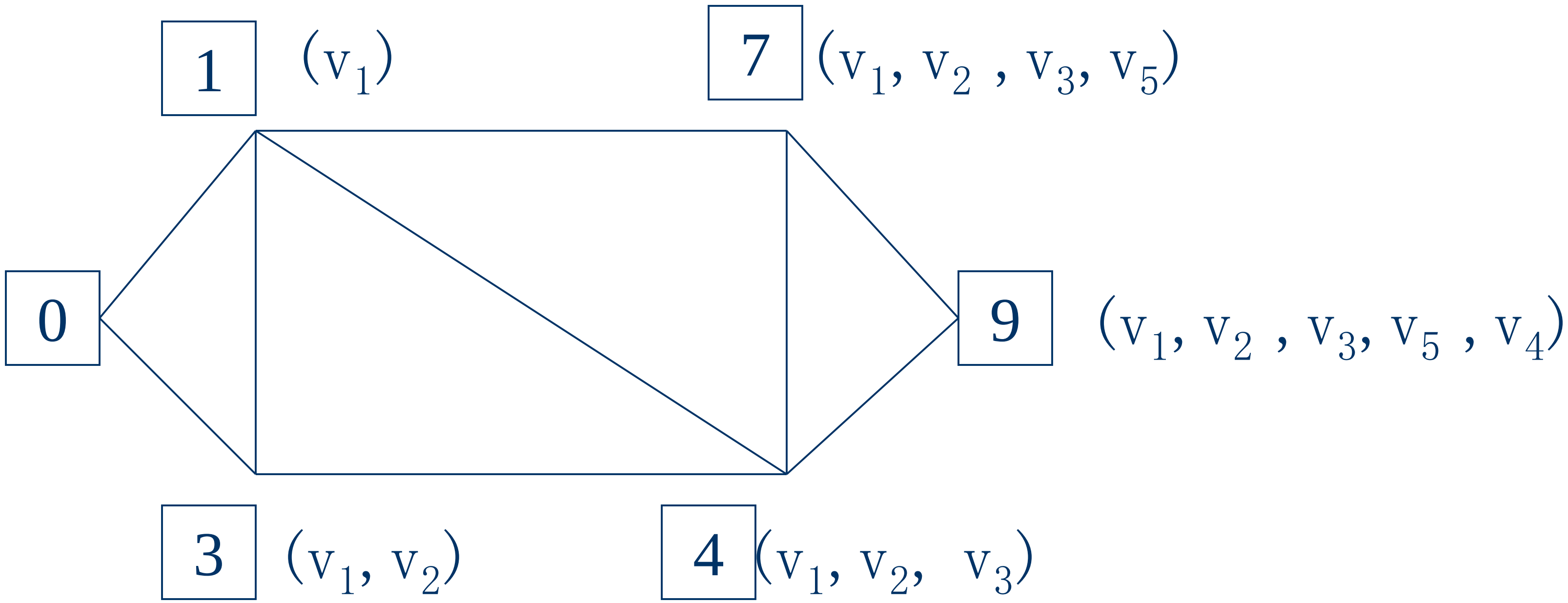


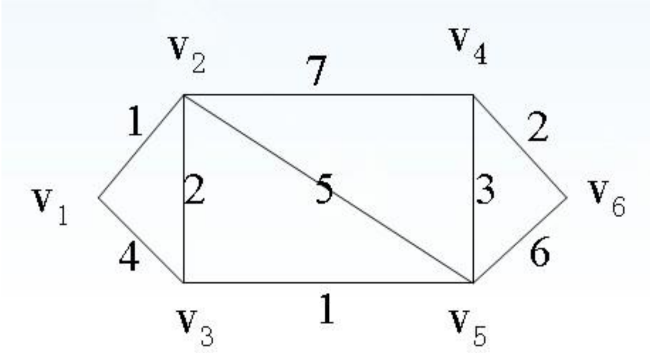


$P=\{v_1,v_2 , v_3, v_5 , v_4\}$

$T=\{v_6\}$

二. Dijkstra算法(*)



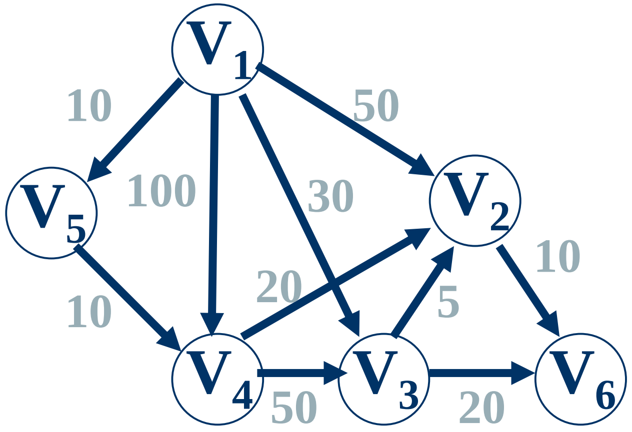


P={v_1,v_2 , v_3, v_5 v_4 , v_6}

T={}

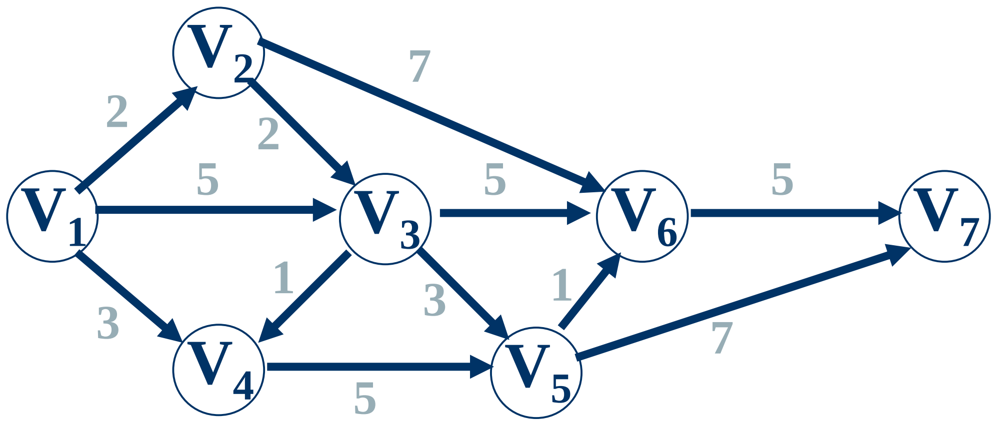
二. Dijkstra算法

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
step1	50	30	100	10/V_1	∞	10(v_5)第1短
step2	50	30	20/V_5		∞	20(v_4)第2短
step3	40	30/V_1			∞	30(v_3)第3短
step4	35/V_3				50	35(v_2)第4短
step5					45/V_2	45(v_6)第5短



二. Dijkstra算法(*)

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
step1	2	5	3	∞	∞	∞	2(v_2)第1短
step2		4	3	∞	9	∞	3(v_4)第2短
step3		4		8	9	∞	4(v_3)第3短
step4				7	9	∞	7(v_5)第4短
step5					8	14	8(v_6)第5短
step6						13	13(v_7)第6短



最短路径(*)

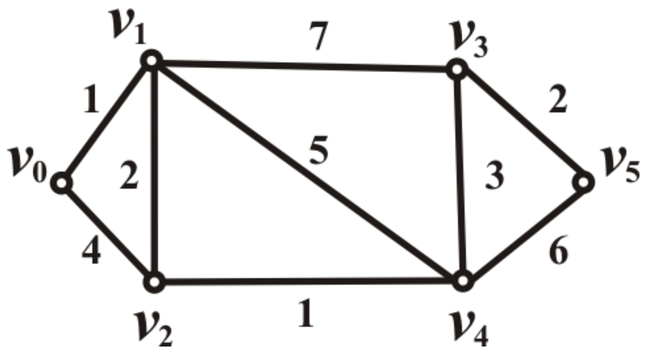
带权图$G=<V,E,w>$, 其中$w:E\rightarrow R$. $\forall e\in E$, $w(e)$称作e的**权**. $e=(v_i,v_j)$, 记$w(e)=w_{ij}$. 若v_i,v_j不相邻, 记$w_{ij}=\infty$.

通路L的权: L的所有边的权之和, 记作$w(L)$. u和v之间的**最短路径**: u和v之间权最小的通路.

例 $L_1=v_0v_1v_3v_5$, $w(L_1)=10$,

$L_2=v_0v_1v_4v_5$, $w(L_2)=12$,

$L_3=v_0v_2v_4v_5$, $w(L_3)=11$.



标号法 (E.W. Dijkstra, 1959)（*）

设带权图$G=<V,E,w>$, 其中$\forall e\in E$, $w(e)\geq 0$.

设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 求v_1到其余各顶点的最短路径

1. 令 $l_1\leftarrow 0$, $p_1\leftarrow\lambda$, $l_j\leftarrow+\infty$, $p_j\leftarrow\lambda$, $j=2,3,\ldots,n$,

   $P=\{v_1\}$, $T=V-\{v_1\}$, $k\leftarrow 1$, $t\leftarrow 1$. / λ表示空

2. 对所有的$v_j\in T$且$(v_k,v_j)\in E$

   令$l\leftarrow\min\{l_j, l_k+w_{kj}\}$, 若$l=l_k+w_{kj}$, 则令$l_j\leftarrow l$, $p_j\leftarrow v_k$.

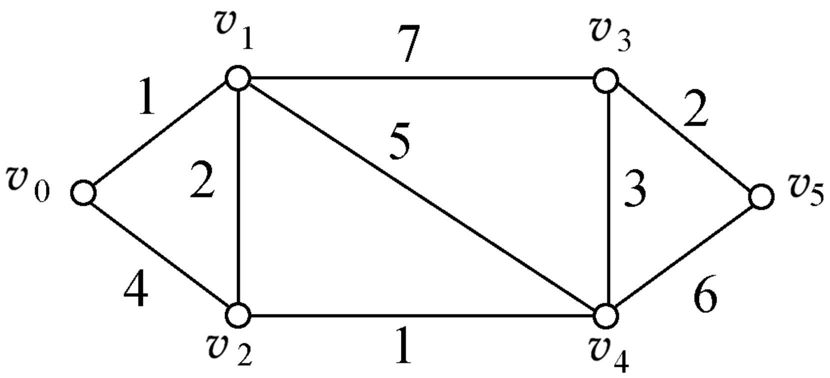
3. 求$l_i=\min\{l_j| v_j\in T_t\}$.

   令$P\leftarrow P\cup\{v_i\}$, $T\leftarrow T-\{v_i\}$, $k\leftarrow i$.

4. 令$t\leftarrow t+1$, 若$t<n$, 则转2.

Dijkstra标号法(*)

例 求v_0到v_5的最短路径

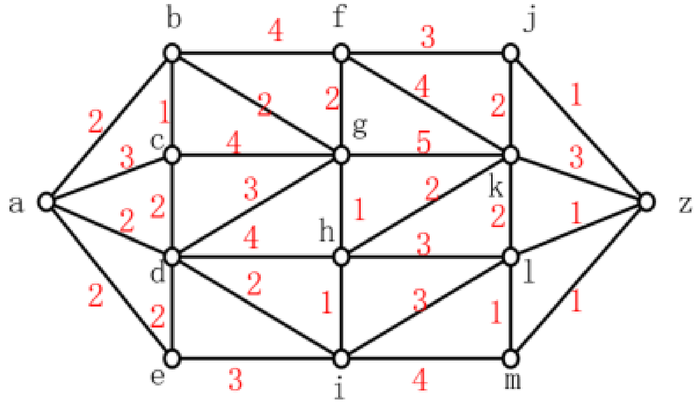


t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(1,v_0)^*$	$(4,v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3,v_1)^*$	$(8,v_1)$	$(6,v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(8,v_1)$	$(4,v_2)^*$	$(+\infty, \lambda)$
5				$(7,v_4)^*$		$(10,v_4)$
6						$(9,v_3)^*$

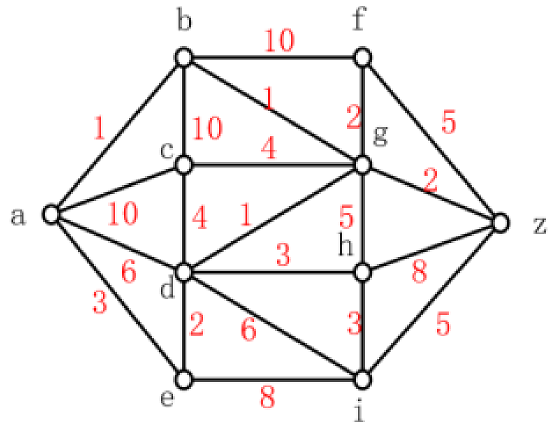
v_0到v_5的最短路径: $v_0v_1v_2v_4v_3v_5$,　　$d(v_0,v_5)=9$

二. Dijkstra算法(*)

例：用Dijkstra算法求下图(a)(b)从a到z的最短路径及其长度.



(a)



(b)

解：(a)图中a到z的最短路径长为8,路径为（a, d, i, l, z）.

(b)图中a到z的最短路径长为4,路径为（a, b, g, z）.

E.W.Dijkstra (1930~2002)

1 提出“goto有害论”;

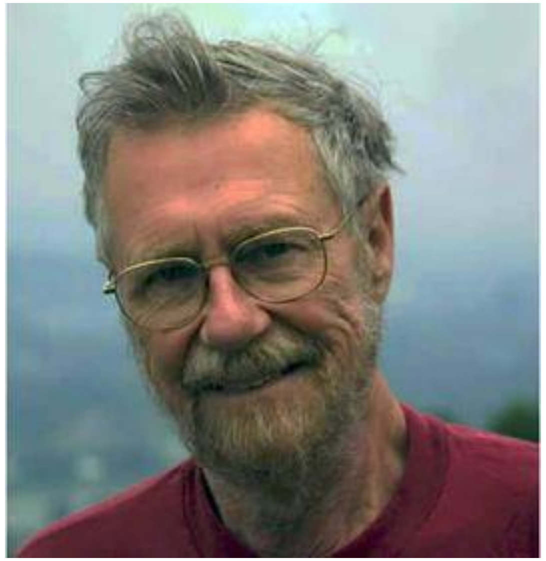
2 提出信号量和PV原语;

3 解决了“哲学家聚餐”问题;

4 Dijkstra最短路径算法和银行家算法的创造者;

5 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者;

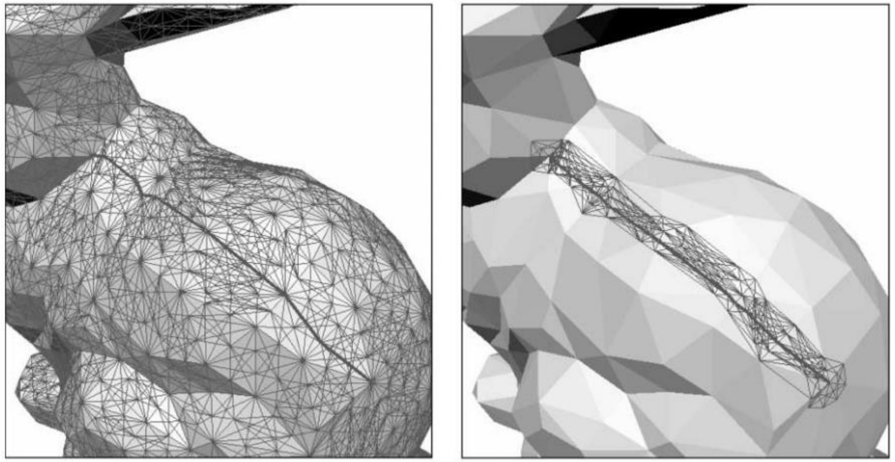
6 THE操作系统的设计者和开发者;



与D. E. Knuth并称为我们这个时代最伟大的计算机科学家的人。

与癌症抗争多年，于2002年8月6日在荷兰Nuenen自己的家中去世，享年72岁。

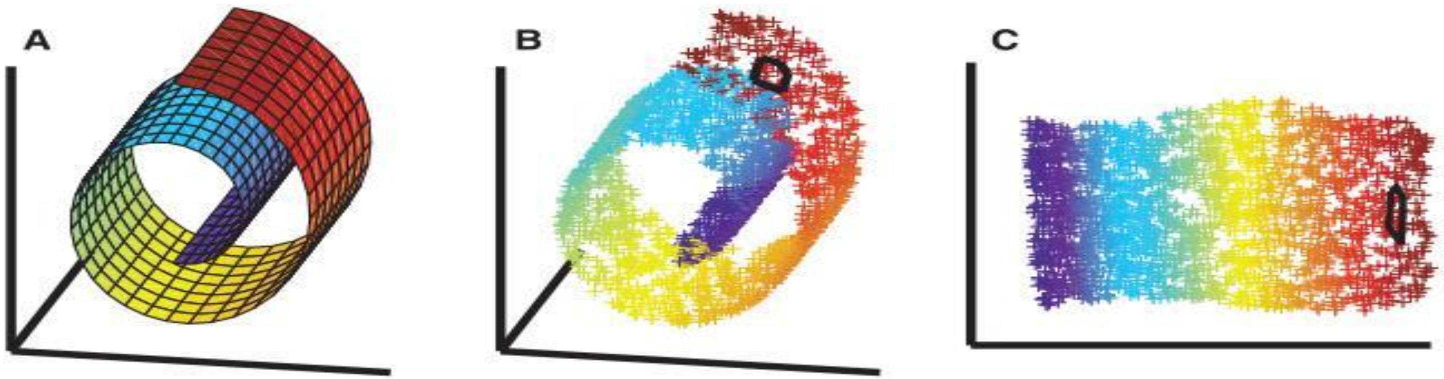
网格模型上的最短路径

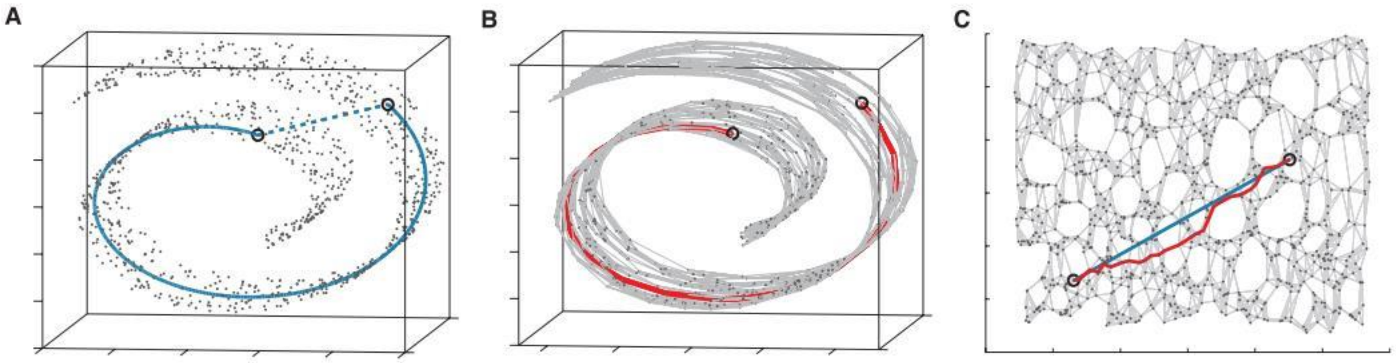


近似最短路径

精确最短路径

流形学习（ISOMAP）





三.拓扑排序和关键路径（*）

对一个工程或者系统,人们最关心的往往是两个方面的问题：

（1）工程能否顺利进行

对AOV网进行拓扑排序

（2）估算整个工程完成所必须的最短时间

对AOE网求关键路径

❖AOV网（activity on vertex network）

【定义】在一个表示工程的有向图中，用顶点表示活动，用弧表示活动之间的优先关系，称这样的有向图为顶点表示活动的网，简称AOV网

思考：AOV网中能不能出现回路？

如何判断AOV网是否有回路？

对AOV网
拓扑排序

三.拓扑排序和关键路径（*）

❖拓扑排序

【定义】设$G=(V,E)$是一个有向图，V的顶点序列$v_0, v_1,\ldots,v_{n-1}$当且仅当满足以下条件：

若从顶点v_i到v_j有一条路径，在顶点序列中v_i必须存在于v_j之前，则称此顶点序列为一个**拓扑序列**。

- 对一个有向图构造拓扑序列的过程称为**拓扑排序**。

注：拓扑排序的排序结果很可能是不唯一的。

❖拓扑排序的过程

过程如下：

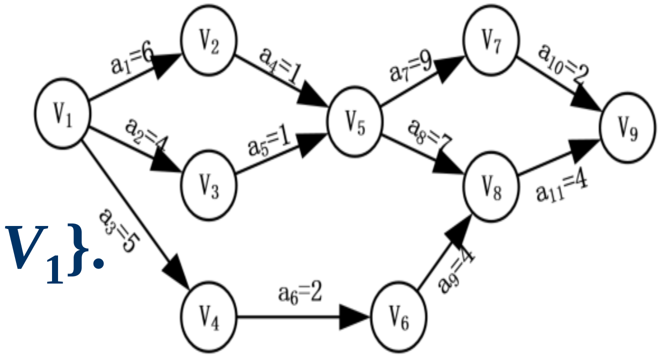
① 每次输出一个入度为0（即没有前驱）的结点,并删除该点与该点指出的有向边.

② 重复此过程直至全部入度为0的结点被输出,得到的结点输出序列就是拓扑序列.

③ 如果所有入度为0的结点都被输出,但图还不为空,说明该有向图中必存在环.

三.拓扑排序和关键路径（*）

❖拓扑排序的过程



例：由右图可得拓扑排序过程如下：

1）入度为0的结点只有V_1，所以输出V_1，并删除边a_1, a_2, a_3, $\{V_1\}$.

2）入度为0的结点有V_2, V_3, V_4，可以任选一个结点输出，

比如先输出V_2，并删除边a_4, $\{V_1,V_2\}$.

3）入度为0的结点有V_3, V_4，可以任选一个结点输出，

比如先输出V_3，并删除边a_5, $\{V_1,V_2,V_3\}$.

…

9）入度为0的结点只有V9,输出V9，全部结点被输出，图为空，拓扑排序完成，最后排序结果为{V1,V2,V3,V4,V5,V6,V7,V8,V9}.

本例题答案不唯一，满足拓扑排序的条件即可.

❖AOE网（Activity On Edge Network）

【定义】AOE网是指用边表示活动的网,是一个带权的有向无环图.

- 顶点：事件（Event），
- 弧：活动（Activity），
- 权值：活动持续的时间.

❖关键路径

由于整个工程只有一个开始点和一个完成点，在正常的情况（无环）下，

- 网中只有一个入度为零的点（称作**源点**）
- 一个出度为零的点（称作**汇点**）

【定义】完成工程的最短时间指的是从源点到汇点的最长路径的长度,而这个长度最长的路径就叫做**关键路径**.

❖关键活动

【定义】假设开始点是v_1, 从v_1到v_i的最长路径长度叫做事件v_i的最早发生时间.

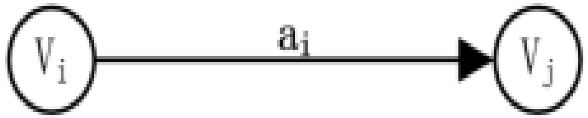
- 这个时间决定了所有以v_i为尾的弧所表示的活动的最早开始时间.
- 活动a_i的最早开始时间通常用$e(i)$表示.

【定义】活动的最迟开始时间$l(i)$是指在不推迟整个工程完成的前提下, 活动a_i最迟必须开始进行的时间.

【定义】我们把$l(i)=e(i)$的活动叫做关键活动.

❖关键活动

若活动a_i由弧$<i, j>$表示,持续时间记为$dut(<i, j>)$,则关系如下图所示：



- 活动i的最早开始时间等于事件j的最早发生时间

$$e(i) = v_e(i)$$

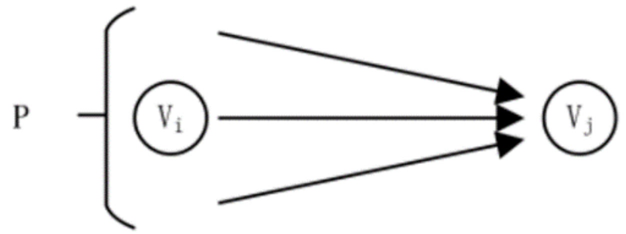
- 活动i的最迟开始时间等于事件k的最迟时间减去活动i的持续时间

$$l(i) = v_l(j) - dut(<i, j>)$$

❖关键活动

$v_e[j]$和$v_l[j]$可以采用下面的递推公式计算,需分两步进行：

（1）向汇点递推

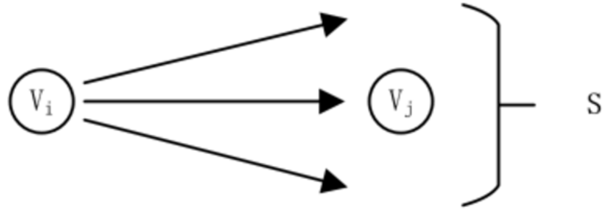


a) 向汇点递推

- v_e(源点) = 0；
- $v_e(j) = \mathrm{Max}\{v_e(i) + dut(<i, j>)\}$

➢ 公式意义：从指向顶点V_j的弧的活动中取最晚完成的一个活动的完成时 间作为V_j的最早发生时间$v_e[j]$, 如右图所示.

❖关键活动



b) 向源点递推

（2） 向源点递推

由上一步的递推,最后总可求出汇点的最早发生时间$v_e[n]$.因汇点就是结束点，最迟发生时间与最早发生时间相同,即$v_l[n]= v_e[n]$.从汇点最迟发生现时间$v_l[n]$开始，利用下面公式：

- v_l(汇点) = v_e(汇点);
- $v_l(i) = Min\{v_l(j) – dut(<i, j>) \}$

➢ **公式意义**： 由从V_i顶点指出的弧所代表的活动中取需最早开始的一个开始时间作为V_i的最迟发生时间，如下图所示.

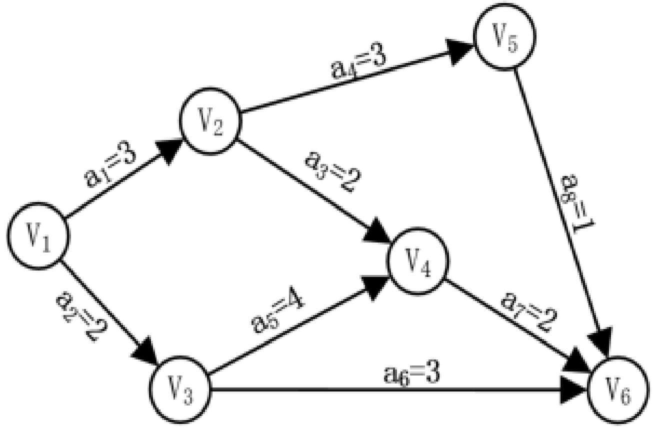
三.拓扑排序和关键路径（*）

例：求右图中AOE网的拓扑排序和关键路径.

解：由图可得,拓扑排序为V_1-V_2-V_3-V_4-V_5-V_6.

关键路径求解如下：

顶点	ve	vl	活动	e	l	l-e
v_1	0	0	a_1	0	1	1
v_2	3	4	a_2	0	0	0
v_3	2	2	a_3	3	4	1
v_4	6	6	a_4	3	4	1
v_5	6	7	a_5	2	2	0
v_6	8	8	a_6	2	5	3
			a_7	6	6	0
			a_8	6	7	1



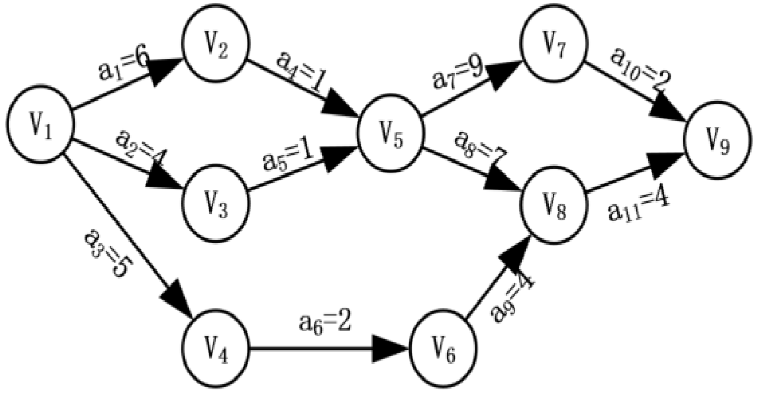
由上表可知,活动a_2、a_5、a_7**的最早开始时间和最迟开始时间相等**（e=l），**所以**a_2、a_5、a_7**为关键活动.故得出关键路径为：**V_1-V_3-V_4-V_6.

三.拓扑排序和关键路径（*）

例：求右图中AOE网的关键路径.

解：由图可得,关键路径求解如下：

事件 j	$e_v[j]$	$L_v[j]$	活动 i	e[i]	L[i]	L[i]-e[i]
1	0	0	1	0	0	0
2	6	6	2	0	2	2
3	4	6	3	0	3	3
4	5	8	4	6	6	0
5	7	7	5	4	6	2
6	7	10	6	5	8	3
7	16	16	7	7	7	0
8	14	14	8	7	7	0
9	18	18	9	7	10	3
			10	16	16	0
			11	14	14	0



由上表可知,活动a_1、a_4、a_7、a_8、a_{10}、a_{11}为关键活动,所以关键路径为V_1-V_2-V_5-V_7-V_9或者V_1-V_2-V_5-V_8-V_9.

1.6 矩阵表示

1.7 路径

1.8 图的着色

1.9 匹配

§8 图的着色

一、 对偶图

二、 四色猜想

三、 平面图面着色

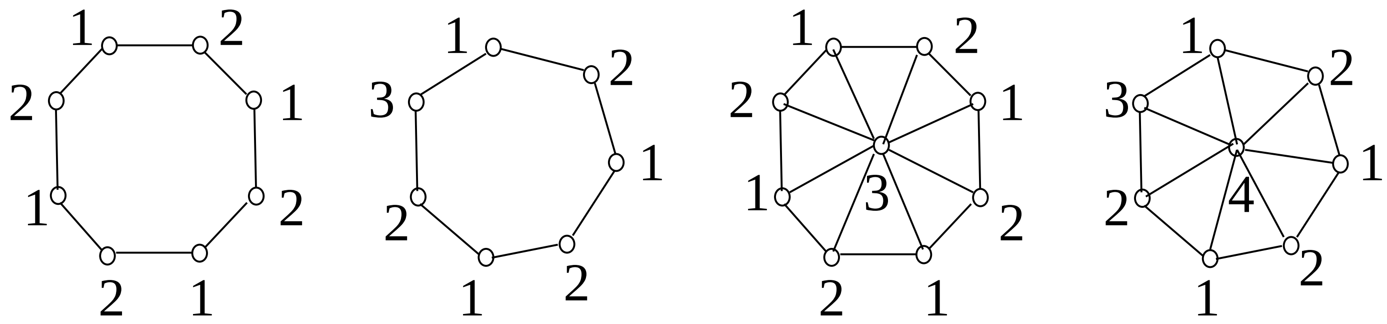
四、 平面图点着色

（点）着色

定义 设无向图G无环，对G的每个顶点涂一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色，称为图G的一种**点着色**，简称**着色**。若能用k种颜色给G的顶点着色，则称G是**k-可着色**的，记作：$\chi(G) = k$

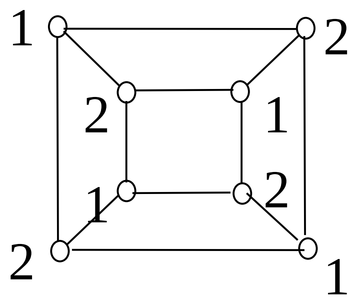
图的着色问题：用尽可能少的颜色给图着色。

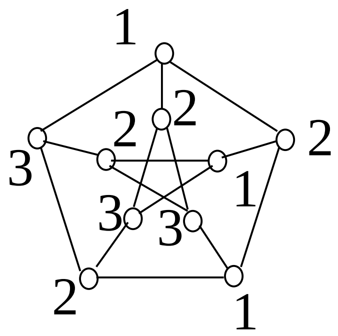
例1

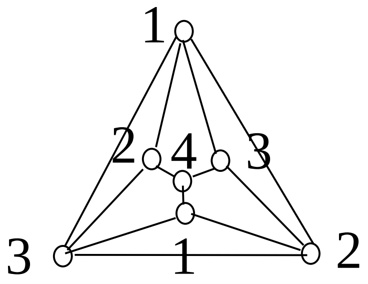


例

例2

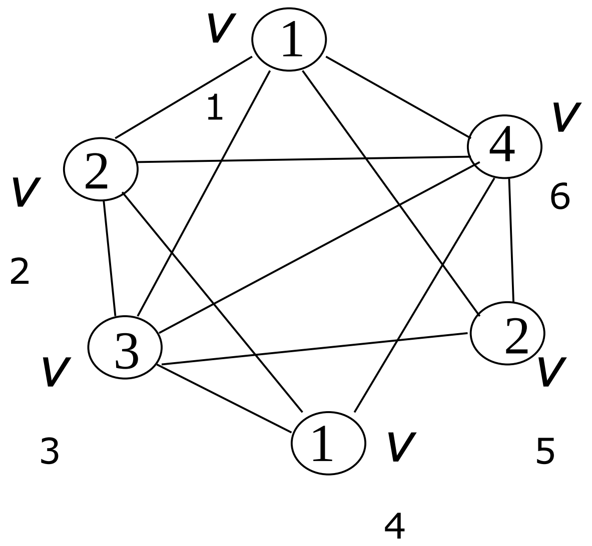






例

例：学生会下设6个委员会，第一委员会={张，李，王}，第二委员会={李，赵，刘}，第三委员会={张，刘，王}，第四委员会={赵，刘，孙}，第五委员会={张，王}，第六委员会={李，刘，王}. 每个月每个委员会都要开一次会，为了确保每个人都能参加他所在的委员会会议，这6个会议至少要安排在几个不同时间段？



至少要4个时段

第1时段：一，四

第2时段：二，五

第3时段：三

第4时段：六

应用

- 有n项工作，每项工作需要一天的时间完成。有些工作由于需要相同的人员或设备不能同时进行，问至少需要几天才能完成所有的工作？
- 计算机有k个寄存器，现正在编译一个程序，要给每一个变量分配一个寄存器。如果两个变量要在同一时刻使用，则不能把它们分配给同一个寄存器.如何给变量分配寄存器？
- 无线交换设备的波长分配。有n台设备和k个发射波长，要给每一台设备分配一个波长。如果两台设备靠得太近，则不能给它们分配相同的波长，以防止干扰。如何分配波长？

一. 对偶图

- 将平面图G嵌入平面后,通过以下手续(简称D过程):

  (1)对图G的每个面D_i的内部作一顶点且仅作一顶点v^*_i;

  (2)经过每两个面D_i和D_j的每一共同边界e^*_k作一条边$e^*_k=(v^*_i,v_j)$与e_k相交;

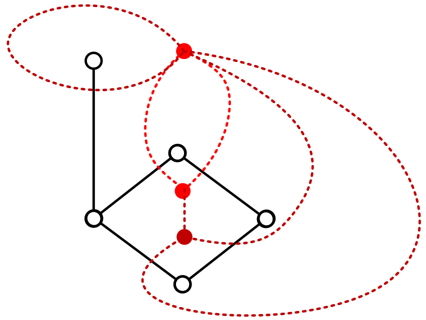
  (3)当且仅当e_k只是面D_i的边界时,v^*_i恰存在一自回路与e_k相交。

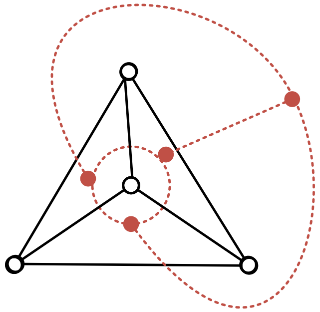
  所得的图称为图G的**对偶图**,记为G^*。

  如果图G的对偶图G^*同构于G，则称图G是**自对偶图**。

  对偶图是相互的。

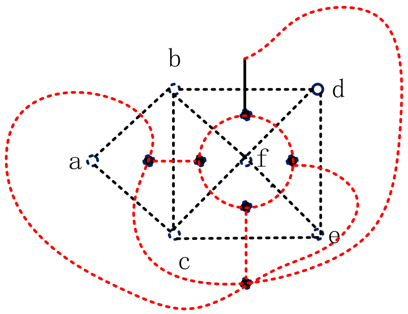
如下图所示，左图为对偶图，右图为自对偶图。



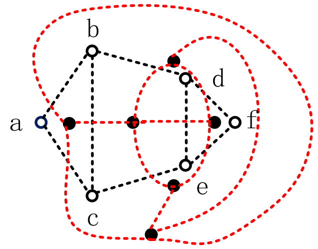


一. 对偶图

➢ 一个平面图可以有多种画法，如下图所示，a)、b)为同一平面图，但(a)中的对偶图有5度结点，(b)中的对偶图却没有。可见一个图的对偶图不是唯一的。



(a)



(b)

G与G^*的关系：

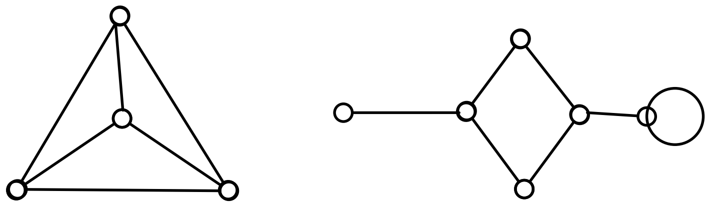
平面图G的对偶图G^*是平面图；

若连通平面图G是(n,m)图，则它有m-n+2个面，则G^*是(m-n+2, m)图，有n个面；

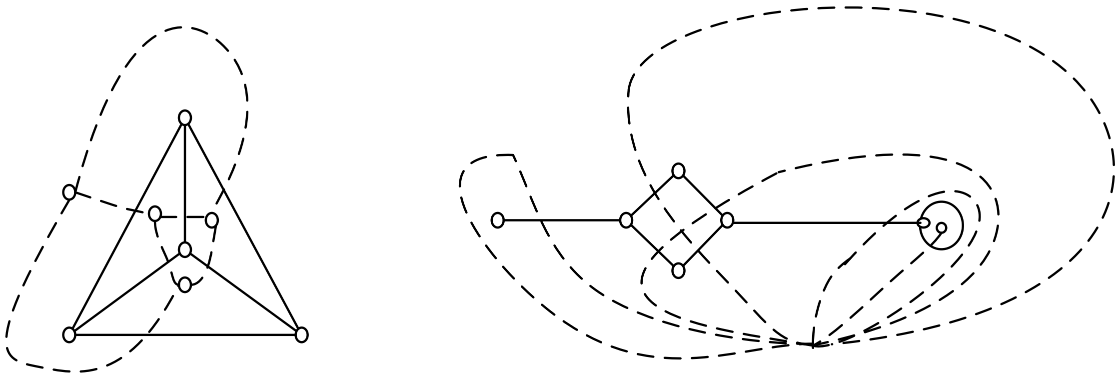
G中面的次数为G^*中面中点的度数；

G的圈对应着G^*的割（边）集；

例：分别作出下图中两种图的对偶图。



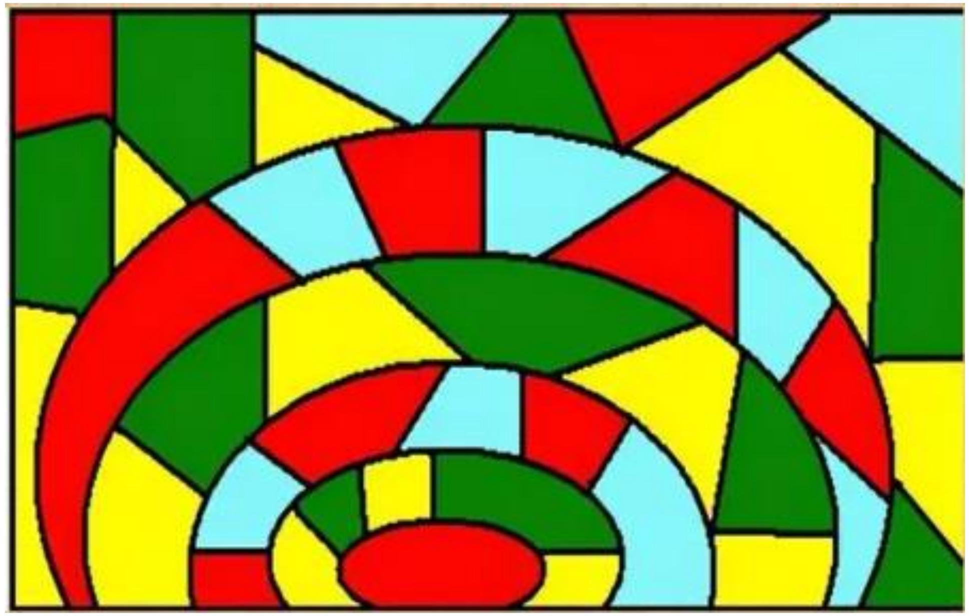
解：作图如下，实线图与虚线图互为对偶图。



四色定理（Four color theorem）

① 每个平面地图都可以只用四种颜色来染色

② 没有两个邻接的区域颜色相同



三. 平面图面着色

❖基本概念

- 平面图着色问题起源于地图的着色, 对地域连通且相邻国家有一段公共边界的平面地图G的每个国家涂上一种颜色, 使相临的国家涂不同的颜色, 称为对G的一种**面着色**,
- 若能用k种颜色给G的面着色,就称对G的面进行了**k着色**, 或称G是**k-面可着色**的,
- 若G是k-面可着色的, 但不是（k-1）-面可着色的, 就称G的**面色数**为k,记为χ^*（G）= k.

三. 平面图面着色

❖基本性质

【定理】地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G^*是k-可着色的.

【定理】在简单连通平面图中至少有一个顶点v_0,其次数$d(v_0)\leq 5$.

证明：用反证法

设(n, m)图G是简单连通平面图,所有顶点的次数不小于6, 则

$m\leq 3n-6$, 又 $2m=\sum d(v)\geq 6n$, 即$m \geq 3n$, 矛盾

故存在v_0,其次数$d(v_0)\leq 5$.

三. 平面图面着色(*)

- **五色定理：** 用5种颜色可以给任一简单连通平面图G=<V,E>正常着色。

证明：对图的顶点数作归纳：

(i) 当n≤5时,显然成立；

(ii)假设k个顶点时成立,考虑k+1阶简单连通平面图G；

由引理知图G至少存在一顶点v_0其次数$d(v_0)\le 5$。

显然$G-v_0$是k阶简单连通平面图，由归纳假设可用5种颜色进行着色。

假设已用红、黄、蓝、绿、黑5种颜色对$G-v_0$着好了色，现在考虑对G中顶点v_0的着色。

a)若$d(v_0)<5$，显然可用它的邻接顶点所着颜色之外的一种颜色对v_0进行着色，即G可以用5种颜色着色；

b)若$d(v_0)=5$，显然只需要考虑与v_0邻接的顶点被着以不同的5种颜色的情况进行讨论；

三. 平面图面着色(*)

令$W_1=\{x|x\in G$，且x着红色或蓝色$\}$，$W_2=\{x|x\in G$，且x着黄色或绿色$\}$，考虑W_1导致的G的导出子图$\langle W_1\rangle$

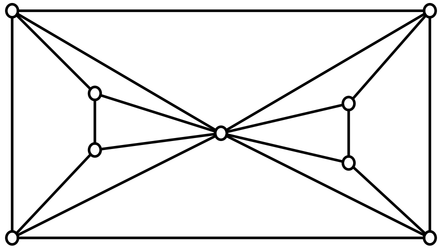
①若v_1和v_3分属于$\langle W_1\rangle$的两个不同连通分图，那么将v_1所在分图的红蓝色对调,并不影响图G-v_0的正常着色。然后将v_0着上红色,即得图G的正常着色；

②若v_1和v_3属于$\langle W_1\rangle$的同一分图中,则v_1和v_3之间必有一条顶点属于红蓝集的路径P,它加上v_0可构成回路C:(v_0,v_1,P,v_3,v_0)；

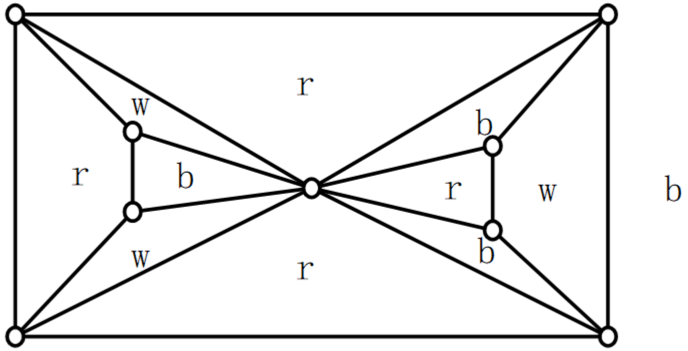
由于C的存在,将黄绿集分为两个子集，一个在C内，另一个在C外，于是黄绿集的导出子图至少有两个分图，一在C内，一在C外。于是问题转化为①的类型,对黄绿集按①的办法处理，即得图G的正常着色。

证毕。

例：试用3种颜色，给下图所示的平面图着色，使两个邻接的面不会有同样的颜色。



解：用r,b,w表示不同的颜色，着色如下图所示。



❖基本概念

【定义】图G的**正常着色**（简称**着色**）是指对它的每一个结点指定一种颜色，使得没有两个相邻的结点有同一种颜色.

【定义】如果图G在着色时用了n种颜色，称G是**n－色**的. 对于图G着色时，需要的最少颜色数称为**图G的着色数**，记为$\chi(G)$.

❖着色方法介绍

韦尔奇·鲍威尔(Welch Powell)方法

过程如下：

1）将图G中的结点按照次数的递减次序进行排列. （可能并不是唯一的,有些结点有相同的次数.）

2）用第一种颜色对第一点着色,并且按排列次序,对与前面着色点不邻接的每一点着上同样的颜色.

3）用第二种颜色对尚未着色的点重复第二步,用三种颜色继续这种做法,直到所有的结点全部着上色为止.

四. 平面图点着色

例：以下图为例进行点着色：

1) 按次数递减排序结点： $A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8$;

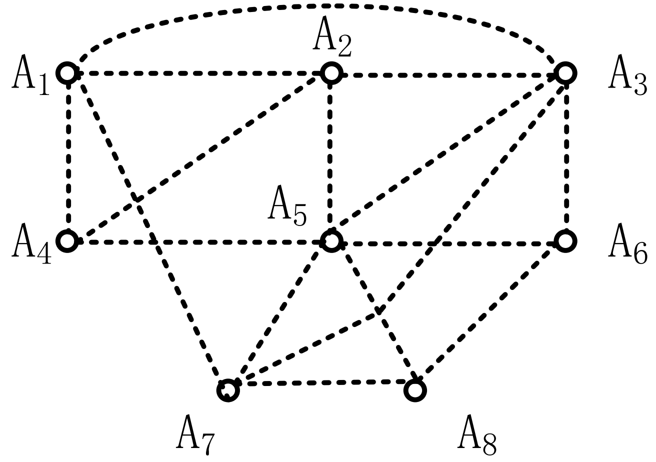
2) 用第一种颜色对A_5着色，并对不相邻的结点A_1也着同一颜色;

3) 对结点A_3和它不相邻的A_4, A_8着第二种颜色;

4) 对结点A_7和它不相邻的结点A_2, A_6着第三种颜色;

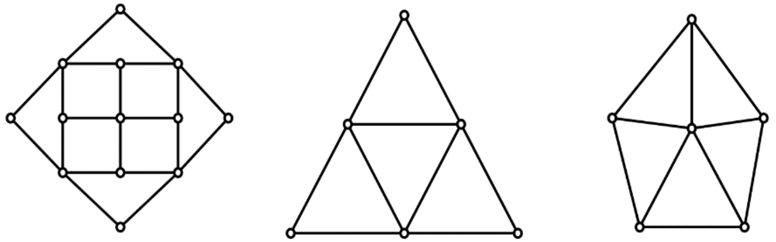
- 则此图为三色的.

  G不可能是二色的，因为A_1, A_2, A_3邻接，必须用三种颜色. 所以$\chi(G)=3$.



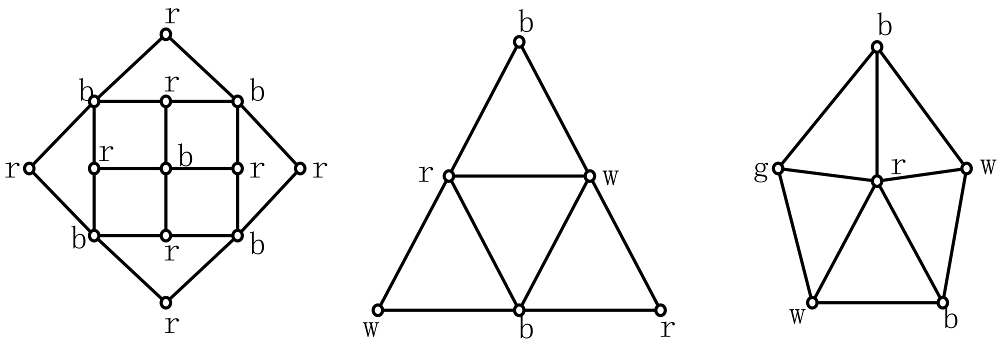
四. 平面图点着色

例：给下图所示的3个图的顶点正常着色，问每个图至少需要几种颜色？



a)　　　　b)　　　　c)

解：用r,b,w,g表示不同的颜色，对图的顶点正常着色如下图所示。可见(a)需要2种颜色，(b)需要3种颜色，(c)需要4种颜色。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

1.6 矩阵表示

1.7 路径

1.8 图的着色

1.9 匹配

§9 匹配

一、　匹配与最大匹配

二、　霍尔定理

引例

- 每学年评奖学金，把一等奖（1项），二等奖（2项），三等奖（3项）颁给某班同学，如何描述奖学金与同学之间的关系？

- 运动会颁奖，如何描述名次与运动员之间的关系？

一. 匹配与最大匹配

❖基本概念

【定义】给定简单无向图$G=<V, E>$,

- 若$M\subseteq E$且M中任意两条边都是不邻接的，则子集M称为G的一个**匹配**或**对集**.
- 把M中的边所关联的两个结点称为在**M下是匹配的**.

一. 匹配与最大匹配

❖ 基本概念

【定义】令M是G的一个匹配,

- 若结点v与M中的边关联, 则称v是M-饱和的;
- 若结点v与M中的边不关联, 称v是M-不饱和的;
- 若G中的每个结点都是M-饱和的, 则称M是完全匹配（不唯一）.
- 若G中没有匹配M_1, 使$|M_1|>|M|$, 则称M是最大匹配（不唯一）.

□ 每个完全匹配是最大匹配, 但反之不真.

一. 匹配与最大匹配

❖基本概念

【定义】令M是图G=<V, E>中的一个匹配.

- 若存在一个链,它是由分别由E-M和M中的边交替构成, 则称该链是G中的M-交错链;
- 若M-交错链的始结点和终结点都是M-不饱和的, 则称该链为M-增广链;
- 若M-交错链的始结点也是它的终结点而形成圈, 则称该圈为M-交错圈.

□ 给定两个集合S和T, S与T的对称差, 记为SΔT, 规则如下：

$$S\oplus T=(S\cup T)-(S\cap T)$$

一. 匹配与最大匹配

❖基本定理

【定理】设M_1和M_2是图G中的两个匹配，则在$<M_1 \oplus M_2>$中，每个分图或是交错链，或是交错圈.

【定理】给定二部图$G=<V_1, E, V_2>$，G中存在使V_1中每个结点饱和的匹配等价于对任意$S \subseteq V_1$有$|N(S)| \geq |S|$，其中$N(S)$表示与S中结点邻接的所有结点集合.

一. 匹配与最大匹配

标记法求交错链

首先把X中所有不是M的边的端点用(*)加以标记，然后交替进行以下所述的过程1)和2).

1) 选一个X的新标记过的结点，比如说x_i，用(x_i)标记不通过在M中的边与x_i邻接且未标记过的Y的所有结点．对所有X的新标记过的结点重复这一过程.

2) 选一个Y的新标记过的结点，比如说y_i，用(y_i)标记通过M的边与y_i邻接且未标记过的X的所有结点．对所有Y的新标记过结点重复这一过程.

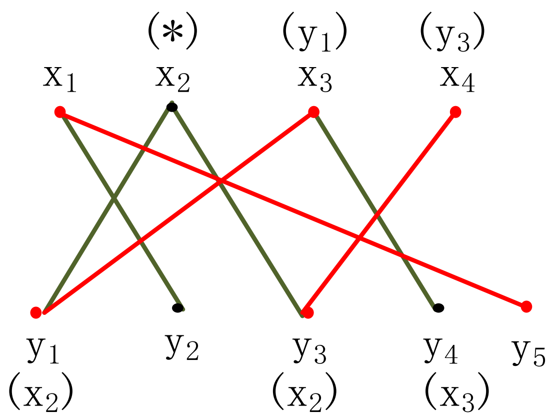
例：　以下图为例进行标记法求交错链的展示：

1) 把x_2标记(*).

2) 从x_2出发，应用过程1)，把y_1和y_3标记(x_2).

3) 从y_1出发，应用过2)，把x_3标记(y_1). 从y_3出发，应用过程2)，把x_4标记(y_3).

4) 从x_3出发，应用过程1)，把y_4标记(x_3)，因y_4不是M中边的端点，说明已找到了一条交替链，即(x_2, y_1, x_3, y_4).



❖求最大匹配方法

过程：

1）找出一条关于匹配M的交替链γ.

2）把γ中属于M的边从M中删去，而把γ中不属于M的边添到M中，得到一新集合M'，此M'也是G的匹配；

①添入的边自身不相交；

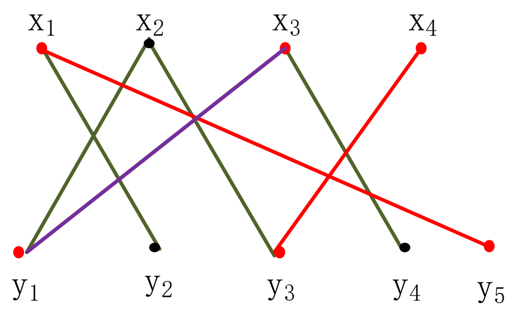
②添入的边不与M中不属于γ的边相交；

3）反复进行这样的过程，直至找不出关于M的交替链为止.

一. 匹配与最大匹配

例：以下图为例，求解该图的最大匹配：

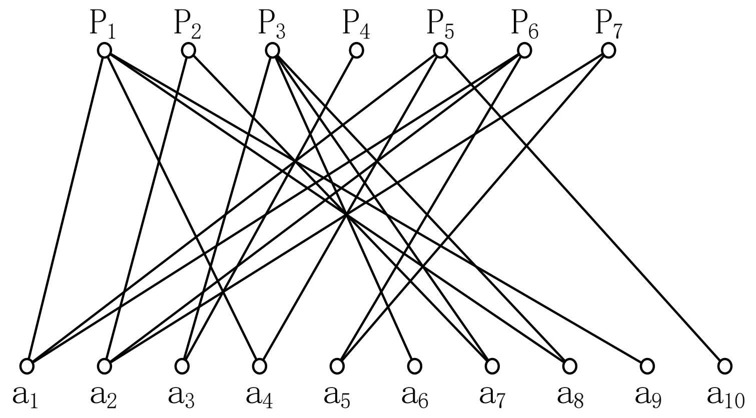
- 先取一个初始匹配$M=\{x_1y_5, x_3y_1, x_4y_3\}$,
- 再用标记法从点x_2开始求得一条交替链：$\gamma=(x_2y_1x_3y_4)$.
- 然后用γ调整匹配M：将γ中属于M的边删去并将其中不属于M的其它边添加到M中，形成M'. 因为对M'用标记法只能从y_2开始，但都不能求出M'的任何交替链，故判定M'是一个最大匹配.



$$M=\{x_1 y_5, x_3y_1, x_4y_3\},$$
$$M'=\{x_2 y_1, x_1 y_5, x_3y_4, x_4y_3\}.$$

一. 匹配与最大匹配

例： 某单位按编制有7个空缺, $P_1, P_2, \ldots\ldots P_7$.
有10个申请者$a_1, a_2, \ldots\ldots a_{10}$,他们的合格工作岗位集合依次是：
$\{P_1, P_5, P_6\}, \{P_2, P_6, P_7\}, \{P_3, P_4\}, \{P_1, P_5\}, \{P_6, P_7\}, \{P_3\}, \{P_2, P_3\},$
$\{P_1, P_3\}, \{P_1\}, \{P_5\}$.
如何安排他们工作使得无工作的人最少？



解： 根据题意可绘制下图：

由上图可求得一个最大匹配：

$M = \{ (P_1, a_9), (P_2, a_2), (P_3, a_6), (P_4, a_3), (P_5, a_4), (P_6, a_1), (P_7, a_5) \}$.

根据该匹配分配工作能使无工作的人最少.

二. 霍尔定理

【霍尔定理】在偶图$G=<V_1,E,V_2>$中存在从V_1到V_2的匹配,当且仅当V_1中任意k个结点至少与V_2中的k个结点相邻,$k=1,2,\ldots,|V_1|$.

- 这个定理中的条件通常称为相异性条件.
- 判断一个偶图是否满足相异性条件通常比较复杂.

二. 霍尔定理

❖判断偶图是否存在匹配的一个充分条件

t条件： 设$G=<V_1,E,V_2>$是一个偶图. 如果满足条件

（1）V_1中每个结点至少关联t条边;

（2）V_2中每个结点至多关联t条边;

则G中存在从V_1到V_2的匹配. 其中t为正整数.

证明：

由条件（1）知, V_1中k个结点至少关联tk条边（$1\le k\le|V_1|$）.

由条件（2）知, 这tk条边至少与V_2中k个结点相关联,

于是V_1中的k个结点至少与V_2中的k个结点相邻接，因而满足相异性条件, 所以G中存在从V_1到V_2的匹配.

二. 霍尔定理

例： 现有三个课外小组：物理组,化学组和生物组，有五个学生：s_1, s_2, s_3, s_4, s_5.

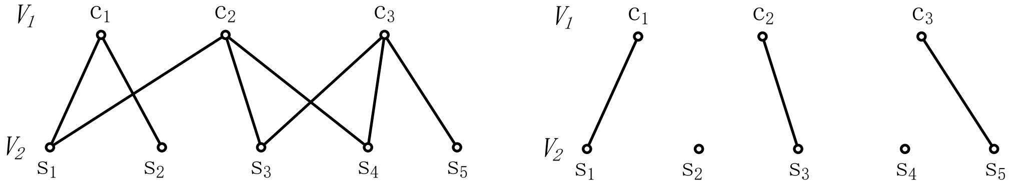
（1）已知s_1, s_2为物理组成员；s_1, s_3, s_4为化学组成员；s_3, s_4, s_5为生物组成员.

（2）已知s_1为物理组成员；s_2, s_3, s_4为化学组成员；s_2, s_3, s_4, s_5为生物组成员.

（3）已知s_1即为物理组成员，又为化学组成员；s_2, s_3, s_4, s_5为生物组成员.

在以上三种情况的每一种情况下，在s_1, s_2, s_3, s_4, s_5中选三位组长，不兼职, 问能否办到？

解：用c_1, c_2, c_3分别表示物理组,化学组和生物组,
$V_1=\{c_1, c_2, c_3\}$, $V_2=\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$.
以V_1, V_2为互补结点子集, 若s_i在c_j中, 则(s_i, c_j)在E中.
（1）$G_1=<V_1, E, V_2>$如图a所示.

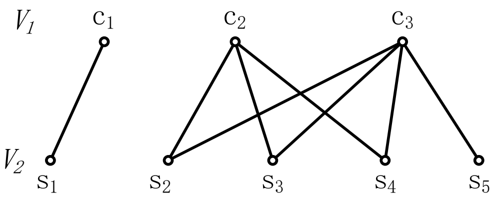


(a) (d)

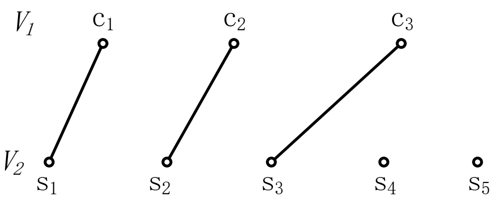
在G_1中，V_1中的每个结点至少关联2条边，而V_2中的每个结点至多关联2条边，因此满足t条件，故存在从V_1到V_2的匹配。事实上，选s_2为物理组的组长，选s_3为化学组的组长，选s_5为生物组的组长，它们对应的匹配如图d所示.

二. 霍尔定理

（2）$G_2 = <V_1, E_2, V_2>$如图b所示.



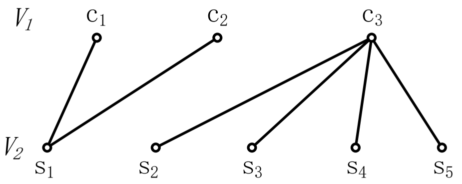
(b)



(e)

所给条件不满足t条件，但是满足相异性条件，因而存在从V_1到V_2的匹配. 一个可能的匹配如图e所示.

（3）$G_3 = <V_1, E_3, V_2>$如图c所示.



(c)

G_3既不满足t条件，也不满足相异性条件，所以不存在从V_1到V_2的匹配，当然三个不兼职的组长从s_1,s_2,s_3,s_4,s_5中选不出来.

应用实例（一）

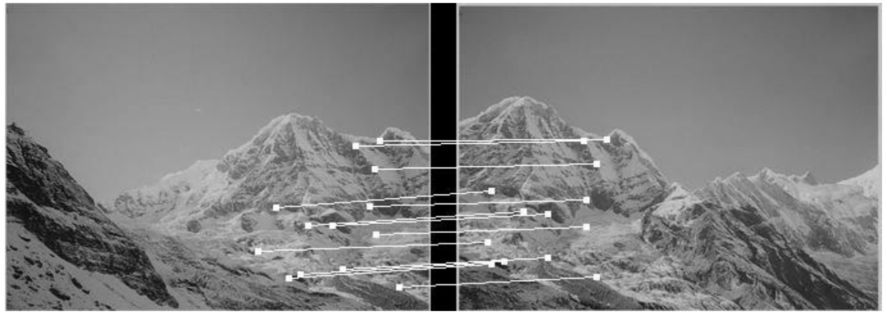
例 某中学有3个课外活动小组：数学组，计算机组和生物组．有赵，钱，孙，李，周5名学生，问分别在下述3种情况下，能否选出3人各任一个组的组长？

(1) 赵，钱为数学组成员，赵，孙，李为计算机组成员，孙，李，周为生物组成员．

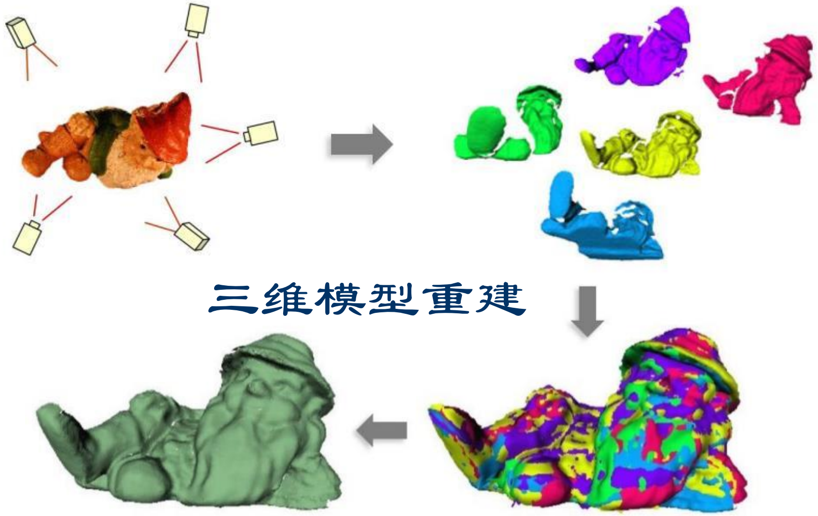
(2) 赵为数学组成员，钱，孙，李为计算机组成员，钱，孙，李，周为生物组成员．

(3) 赵为数学组和计算机组成员，钱，孙，李，周为生物组成员．

图像/网格匹配

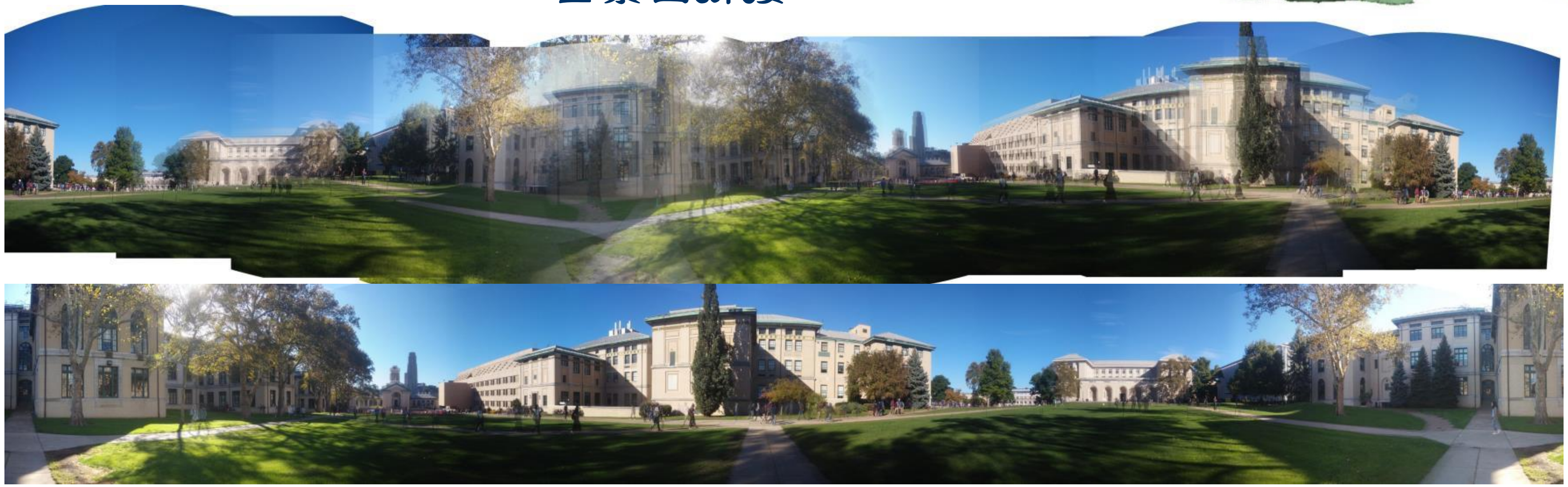


图像配准

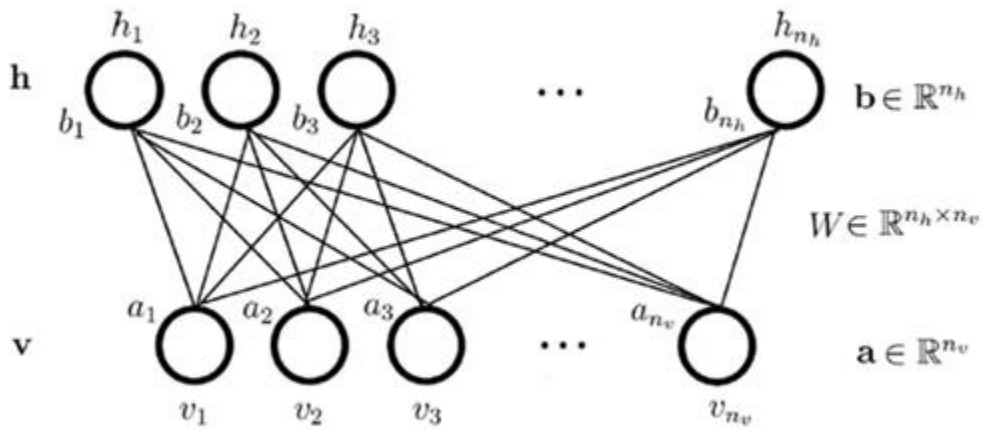


三维模型重建

全景图拼接



受限玻尔兹曼机RBM



v层：可见层，输入特征。（好比黑白图片，v层就是某处是否为白色）

h层：隐含层

常量：n_v, n_h --> 可见层和隐含层神经元数目 num of visiable /hidden

变量：$w_{i,j}$ –> 权值矩阵 a –> 可见层偏置向量 b –> 隐含层偏置向量θ=（w,a,b）–>把所有变量放到一起

状态：v=(v1,v2,...)T h=(h1,h2,...)T 可见层和隐含层的状态向量

习题

1. 5.18 有向图D如图5-1所示，求D中在定义意义下长度为4的通路总数，并指出其中有多少条是回路？又有几条是v_3到v_4的通路？ (40)

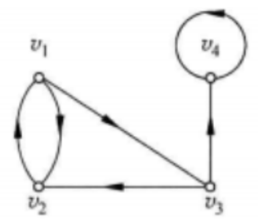


图 5-1

2. 5.21 计算机系期末要安排7门公共课的考试，课程编号为1到7。下列每一对课程有学生同时选修：1和2，1和3, 1和4，1和7, 2和3, 2 和4，2 和5，2和7，3和4, 3和 6，3和7，4和5，4和6，5和6，5和 7,6和7.这7门课的考试至少要安排在几个不同的时间段？给出一个安排方案。 (30)

3. 6.5 今有工人甲、乙、丙要完成3项任务a, b, c,已知甲能胜任a, b, c这3项任务，乙能胜任a, b两项任务，丙能胜任b, c两项任务。你能给出一种安排方案，使每个工人各完成一项他们能胜任的任务吗？ (30)