浙江理工大学 2021—2022 学年第 1 学期

《高等数学 A1》期中试卷标准答案和评分标准

一、选择题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. A;　2. B;　3. D;　4. A;　5. A;　6. D.

评分标准：每小题 4 分，错则扣全分.

二、填空题（本题共 6 小题, 每小题 4 分，满分 24 分）

1. e^{-6}；　2. $x=1$，可去；　3. $-f'(0)$；　4. $(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\dfrac{2x}{1+x^2}\sin x\right]\mathrm{d}x$；

5. 1，-8；　6. 0.

评分标准：第 4 小题导数计算正确但无 dx 的扣 2 分；其余小题错则扣全分.

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1.解：$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$ ………………………(2 分)

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$ ………………………(4 分)

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$ ………………………(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的, 扣 4 分.

2.解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$ (分子有理化)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$ (等价无穷小) ………………………(2 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{4[\ln(1+x)-x]}$ (极限运算及分式化简)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{4\left[\dfrac{1}{1+x}-1\right]}$ (洛必达法则)………………………(4 分)

$=-\dfrac{1}{2}$ ………………………(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的, 扣 4 分.

3.解：由题意知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx}{x}=b=-1$.

因此 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$. ……………………………………………………………(2 分)

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$，此时 $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{1-x}x-\ln(1-x)}{x^2}=-\dfrac{1}{x(1-x)}-\dfrac{\ln(1-x)}{x^2}$.

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$ ……………………………………(4 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{1-x}+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1-x)}=-\frac{1}{2}$$

综上可得 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x(1-x)}-\dfrac{\ln(1-x)}{x^2} & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ ……………………………………………… (6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分.

4.解：由题意知，$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=1+e^x$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=e^x$，因此，有 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{1+e^x}$，…… (2 分)

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot\frac{1}{1+e^x}$$ ………………………………………………………………………(4 分)

$$=-\frac{e^x}{(1+e^x)^3}$$

由于当 $y=1$ 时，$x=0$，从而有 $\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=1}=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^3}=-\dfrac{1}{8}$ ……………………………………(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分.

5.解法一：由题意知，$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2+2t$ ………………………………… (2 分)

从而 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+2t}{\dfrac{t}{1+t}}=(3t+2)(1+t)$ ……………………………………………(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\big((3t+2)(1+t)\big)\Big/\frac{dx}{dt}$$ ……………………………………………………… (6 分)

$$=(6t+5)\cdot\frac{1+t}{t}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

解法二：由题意知，$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2+2t$ ……………………………………… (2 分)

从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}=\dfrac{1}{(1+t)^2}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=6t+2$ ……………………………………………………(4 分)

因此,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\Bigg/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3$$

$$=\left((6t+2)\cdot\frac{t}{1+t}-(3t^2+2t)\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\right)\Bigg/\left(\frac{t}{1+t}\right)^3$$ ……………………………………………… (6 分)

$$=\frac{(6t+2)t(1+t)-(3t^2+2t)}{(1+t)^2}\cdot\frac{(1+t)^3}{t^3}$$

$$=\frac{5t^2+6t^3}{(1+t)^2}\cdot\frac{(1+t)^3}{t^3}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分）

1.解：由 $y-xe^{y-1}=1$，知 $xe^{y-1}=y-1$；且当 $x=0$ 时，$y=1$．将等式 $y-xe^{y-1}=1$ 两边对 x 求导，得

$y'-e^{y-1}-xy'e^{y-1}=0$，即 $y'=\dfrac{e^{y-1}}{2-y}$，且 $y'|_{x=0}=1$，即 $f'(0)=1$ ……………………………(3 分)

因此 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)$,………………………………………………………………(5 分)

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$ ………………………………………………………………………… (7 分)

评分标准：只写出正确答案但无解答步骤的，扣 5 分.

2.解: 定义域: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 $x\neq0$ 时，$y'=\dfrac{4x^2-8x(x+1)}{x^4}=-\dfrac{4(x+2)}{x^3}$， $y''=-\dfrac{(8x+8)x^4-16x^4(x+2)}{x^8}=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$.

令 $y'=0$，得 $x=-2$；令 $y''=0$，得 $x=-3$. ……………………………………………………(2 分)

列表如下:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	拐点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$		$\searrow$

由表可知，单调递增区间为 $(-2,0)$，单调递减区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(0,+\infty)$；当 $x=-2$ 时，$y=-3$ 为函数极小值．凹区间为 $(-3,0)$ 和 $(0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,-3)$；当 $x=-3$ 时，$y=-\dfrac{26}{9}$，拐点为 $\left(-3,-\dfrac{26}{9}\right)$.…………………………………………………………………………… (5 分)

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2$，得水平渐近线为直线 $y=-2$；由 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=\infty$，得铅直渐近线为直线 $x=0$；由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4(x+1)-2x^2}{x^3}=0$，可知函数无斜渐近线. ……………………………………………………………………………………………(7 分)

评分标准：只写出正确答案但无解答步骤的，扣 5 分.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1.证: 令 $f(x)=e^{-x}+\sin x-1-\dfrac{x^2}{2}$，则 $f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x$ ，$f''(x)=e^{-x}-\sin x-1$. ············ (2 分)

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $f''(x)<0$，可知 $f'(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 于是 $f'(x)<f'(0)=0$，从而 $f(x)$ 也在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.··· (3 分)

因此, 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $f(x)<f(0)=0$, 即 $e^{-x}+\sin x<1+\dfrac{x^2}{2}$. 结论得证.······················ (4 分)

评分标准：只写出正确结论但无证明过程的, 扣 4 分.

2.证: 令 $F(x)=f(x)-x$. 由题设知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导.························ (1 分)

由 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$， $F(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$ ，有 $F\left(\dfrac{1}{2}\right)F(1)<0$. 由零点定理知, 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.·· (3 分)

由拉格朗日定理知，存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$ ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\eta)-f(0)}{\eta-0}=\dfrac{\eta}{\eta}=1$. 结论得证.···(4 分)

评分标准：只写出正确结论但无证明过程的, 扣 4 分.