



高等数学 A1

浙江理工大学期中试题汇编

(试卷册 上)

学校: _____

专业: _____

班级: _____

姓名: _____

学号: _____

(此试卷为 2022 年第三版)

目录

1 浙江理工大学 2021—2022 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	1
2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	5
3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	8
4 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	11
5 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	14
6 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	18
7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	22
8 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	26
9 浙江理工大学 2011—2012 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	30
10 浙江理工大学 2010—2011 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	34
11 浙江理工大学 2009—2010 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题	38

资料说明：

此资料为高数 A1 试卷册，如需答案册或者高等数学 A1 期末历年试题、高等数学 A2 期中和期末试题、线性代数试题、概率论试题、物理部分题库以及专业课知识相关试题等等，欢迎加入创琦杂谈学习交流群（QQ 群号：749060380）

如需讨论本试卷试题内容，请加入 cq 数学物理学习群（QQ 群号：967276102），群里讨论氛围浓厚，希望可以帮到你。

本题目准备在 B 站上讲解部分经典题目（后期会在 www.cqtalk.cn 网站和相应 app 上发布，网站正在开发中）（本人 B 站名称为“张创琦”，头像为一朵白色的花），讲解视频预计 10 月 26 号（周三）发布，大家可以进行学习哈。感谢叶同学、王同学、丁同学、郑同学的大力帮助。

2013 年和 2015 年的高数 A1 期中试卷缺失，在这里表示抱歉哈。

本资料还有试卷册下，可移步创琦杂谈学习交流群或者 cq 数学物理学习群下载。

写在前面

这已经是我第三次写序言了，每年坚持写序言（前两次的序言可见微信公众号“创琦杂谈”查看，也欢迎大家关注哈）已成为一种习惯。

今天是计算机学院团展的日子，我坐在自己的办公座位，写着自己的代码，手机在一边放着团展的节目，突然感觉一种幸福的感觉涌上心头。那也是我美好的大学时光啊！工作的压力貌似已经压的我面目全非，到宿舍的第一件事是想休息，身为大二的你体会不到这种劳累，因为刚开学迎接你们的是各式的社团活动，还有每次下学前可以在学生活动中心看到各式各样的摆摊，可以互动，还可以拿奖品。大学的设施齐全，运动、读书、研究……你的各种爱好将在这里释放，在这里你可以来一场说走就走的旅行（当然，遵守疫情防控是第一），你可以结交很多志同道合的朋友，在这里你可以轻松度过很长时间，大学这美好的四年正徐徐向你展开！

大学的幸福生活要珍惜，也要努力学习，虽说大学成绩不像高考成绩一样可以改变我们的人生轨迹（当然，很多人也需要大学成绩，比如转专业和出国），但好好学习是充实生活、是丰富学识、是提高能力的第一步。

很多人都会坚持不下来，这是一大困难，我们要试着克服。进入大学后，我们的生活更加丰富多彩，课外时间也更加充实了。可很多人对学习的心态变弱了。每次当我反思自己这一天有多少时间是在认真投入学习时，结果令我吃惊并且失望，学习时长竟然能用手指头数地过来，当我去想时间都去哪儿了的时候，我又感到一丝空虚。我现在在写序言，想到了2021届的学子们也快开学了，心里还是有很多感慨的。此时此刻，我的脑海里浮现的是我曾经追过的五点半的那缕阳光，为了背单词、背文科题目背到口干舌燥却浑然不知；中午饭过后总想着要在班里多学习一会儿，结果每次回宿舍午休都得迟到；刷数学、理综题目时刷到忘了时间，忘了身边的一切；和小伙伴们争论一道题争到面红耳赤……当我高考完后再去看自己做过的题目时，发现那一张张卷子有过我青春的回忆。时间，带走的是少年的张扬与不羁，带不走的是少年们为了自己的理想而不顾一切地追求自己所热爱的一切的坚韧、不屈、执着与勇气。我和别人唠嗑时总是会说我高三那时候怎么怎么放松，怎么怎么不努力，我觉得我发扬了中国了一大精神：谦虚的精神。但真正的生活，没有走过怎又能知道呢？当高考结束铃声响起，当录取志愿书递送到你的手边，当拖着行李箱迈进校园，少年成熟了，敢于追求的梦也越来越清晰了，热爱学习，热爱生活，本就是一个18岁的花季少年身上最发光发亮的地方。

关于写高数试卷，我在这里给大家提几点建议哈。

1、重视课本。重视课本的知识点、习题、概念定理的应用辨析。课本是基础，是提升的地基。做完试卷后你会发现，期末考点万变不离其宗，也有多道试题来源于课本。课本的每道题目存在都有其必然的道理，希望大家在期末考前不要扔掉课本；

2、学着去总结题型。总结题型是脱离题海游上岸的船舶，总结之后，你会发现考点也就只有那么些。总结时，大家要注意这个知识的应用背景、注意事项等等；

3、认真做题。这是我必须强调的，大学期末卷子没有高考难，想取得高分态度一定要端正，认真去学习每个类型的题目，去学习每个知识点。

在这里希望大家可以认真做卷子，争取期末取得理想的成绩！

由于时间紧，录入时可能出现错误，也可能有其他大大小小的错误，恳请大家批评指正。

张创琦

2021年5月22日、2022年10月22日

更多信息

试卷整理人：张创琦

微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 10 月 22 日 第三版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群号：749060380）cq 数学物理学习群（QQ 群号：967276102）

cq 计算机编程学习群（QQ 群号：653231806）cq 考研学习群（QQ 群号：687924502）

创琦杂谈公众号优秀文章：

曾发布了《[四级备考前要注意什么？创琦请回答！（一）](#)》、《[走！一起去春季校园招聘会看看，感受人间真实](#)》、《[送给即将期末考试的你](#)》、《[那些你不曾在选课中注意到的事情](#)》、《[身为大学生，你的劳动价值是多少？](#)》（荐读）、《[如何找到自己的培养计划](#)》以及计算机学院、信息学院本科阶段多个专业的分流经验分享（来自 20 多位学长学姐的亲身经历与分享，文章过多，就不贴链接啦），公众号也可以帮忙大家发布相关社会实践的问卷。

我最近在联手身边同学开发网站和 APP，争取给大家提供更优质的学习讨论平台。

QQ 群：

“创琦杂谈学习交流群”主要为大家更新各种科目的资料，群里可以讨论问题、也可以发布社会实践的调查问卷互相帮助，目前群成员已有不到 1500 人，相信您的问题会有人解答的。

“cq 数学物理学习群”更适合讨论数学物理相关的题目等，数学科目包括但不限于：高等数学、线性代数、概率论与数理统计等，物理包括但不限于：普通物理、普通物理实验。

“cq 计算机编程学习群”适用于讨论编程语言相关内容，包括但不限于：C 语言、C++ 语言、Java 语言、matlab 语言、python 语言等，也可以讨论计算机相关课程，包括但不限于：数据结构、算法、计算机网络、操作系统、计算机组成原理等。

版权声明：试卷整理人：张创琦，试卷首发于 QQ 群“创琦杂谈学习交流群”和“cq 数学物理学习群”，并同时转发到各个辅导员已经班助等手里。转发前需经过本人同意，侵权后果自负。本资料只用于学习交流使用，禁止进行售卖、二次转售等违法行为，一旦发现，本人将追究法律责任。解释权归本人所有。

考试承诺：本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

最终感谢我的老师、我的朋友，还要感谢各位朋友们对我的大力支持。

本人尽全力为大家寻找、整理数学考试资料，但因时间仓促以及本人水平有限，本练习册中必有许多不足之处，还望各位不吝赐教。

1 浙江理工大学 2021—2022 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\{b_n\}$ 单调增加, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 则 ()

A. $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 不存在.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在.

2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(x - \sin x) \tan x$ 是比 $\ln(1 + x^n)$ 高阶的无穷小, 而 $\ln(1 + x^n)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 $n =$ ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题**错误**的是 ()

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

4. 设 $f(x)$ 二阶连续可导, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{(x-2)^3} = \frac{2}{3}$, 下列说法**正确**的是 ()

A. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

B. $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

C. $(2, f(2))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

D. $f(2)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值, $(2, f(2))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

5. 设曲线 $L: \begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + yt + \sin t = 1 \end{cases}$, 则曲线在 $t = 0$ 处的切线方程为 ()

A. $x + y = 1$

B. $x + y = -1$

C. $x - y = 1$

D. $x - y = -1$

6. 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中**正确**的是 ()

A. $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$ 均是极大值

B. $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$ 均是极小值

C. $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值

D. $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{\sin x}} =$ _____.

2. 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 - x}$ 的第一类间断点是_____, 它是_____间断点.

3. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ _____.

4. 设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$, 则 $dy =$ _____.

5. 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx + 6$ 在 $x = -2$ 处取得极值, 且与直线 $y = -3x + 3$ 相切于点 $(1, 0)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

6. 设 $y = x^2 \cos x$, 则 $y^{(5)}(0) =$ _____.

三、解答题 (本题共 5 小题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, 其中 b 为常数, $f(x)$ 在定义域上处处可导, 求 $f'(x)$.

4. 已知函数 $y = f(x) = x + e^x$, 其反函数为 $x = f^{-1}(y)$, 求 $\left. \frac{d^2 x}{dy^2} \right|_{y=1}$.

5. 计算由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分）

1. 已知函数 $f(u)$ 可导，且 $f'(0) = 1$ ，函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定。设

$z = f(\ln y - \sin x)$ ，求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$ 。

2. 求函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点及渐近线.

五、证明题（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

1. 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. 证明：存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 1$.

2 浙江理工大学 2020—2021 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题（每题 4 分，共 6 小题，共 24 分）

1 判断函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$ 有 ()

A 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点； B. 2 个跳跃间断点；

C 1 个可去间断点，1 个无穷间断点； D. 2 个无穷间断点.

2. 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$ ，则 ()

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

C. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点；

D. $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}}, & x > 0 \\ a \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ()

A. e^2 ;

B. e ;

C. e^{-1} ;

D. 0.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-a}{x-a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x-a} =$ ()

A. $b \sin a$;

B. $b \cos a$;

C. $b \sin f(a)$;

D. $b \cos f(a)$.

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时，若 $x \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$ ()

A. 1;

B. 2;

C. 3;

D. 4.

6 下列说法正确的是 ()

A 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导；

B 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续；

C 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可微，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 极限不存在；

D 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导.

二 填空题（每题 4 分，共 6 小题，共 24 分）

1 函数 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 图形的渐近线有_____（填写渐近线方程）.

2 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, f'(1)=2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\sqrt{1+x}-1)}{f(e^x-x)} =$ _____.

3 曲线 $x+y+e^{2y}=0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程_____.

4 设函数 $y=x^2e^x$, 则 $y^{(10)} =$ _____.

5 设函数 $y=3e^x \cos x$, 则 $dy=$ _____.

6 函数 $y=x^3+2x$ 在 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理, 所得中值 $\xi=$ _____.

三 计算题 (本题共 5 小题, 每题 6 分, 满分 30 分, 应写出演算过程及相应文字说明)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)}$. (6 分)

2. 求 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$ 处处可导. (6 分)

3. 设函数 $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1) \\ y = 1 - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$. (6 分)

4. 设函数 $y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \ (y > 0)$, 求 $y'(0)$. (6 分)

5. 设函数 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, 求 dy . (6 分)

四 综合题（本题共 2 小题，第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，满分 14 分，应写出具体解题过程）

1. 求常数 k ，使曲线 $f(x)=k(x^2-3)^2$ 上拐点处的法线通过原点。（6 分）

2. 已知 $f(x)=x^3-3ax+b$ ($a \neq 0$) 在点 $(2, f(2))$ 处与直线 $y=8$ 相切，

(1) 求 a, b 的值， (2) 单调区间及极值。（8 分）

五 证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，证明 $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$.（4 分）

2 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(1)=0$ ，试证明存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$.

（4 分）

3 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_1 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()

- A. 充分且必要条件; B. 充分非必要条件;
C. 必要非充分条件; D. 既非充分也非必要条件;

2. 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 ()

- A. (1, 0) B. (2, 0) C. (3, 0) D. (4, 0)

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(mx)}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $m =$ ()

- A. 1; B. 2; C. 3; D. 0;

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} =$ ()

- (A) $\frac{1}{6}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{4}{3}$;

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中, 与 x 不等价的是 ()

- (A) $e^x - 1$; (B) $\sqrt{1+x} - 1$; (C) $\tan x$; (D) $\ln(1+x)$;

6. 函数 $y = f(x)$ 下面说法正确的是 ()

- (A) 函数在某点连续一定在该点可导; (B) 函数在某点不可导一定在该点不连续;
(C) 函数在某点不可导一定在该点连续; (D) 函数在某点可导一定在该点连续;

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1. 设函数 $y = -x^2 + 1$ 在定义域内弧微分 $ds =$ _____ 顶点处的曲率 $K =$ _____

2. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ _____

3. 曲线 $y = \frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为: _____ 条, 无穷间断点有: _____ 个

4. $y = x^2 e^x$, 则 $y^{(20)} =$ _____.

5. 设 $y = 3e^x \cos x$, 则函数的微分 $dy =$ _____

6. 函数 $f(x) = x^3 - 9x + 2$ 在 $[0, 3]$ 上满足罗尔定理, 则中值点 $\xi =$ _____

三、计算题（本题共 6 小题，每题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$2. \text{求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right]$$

$$3. \text{求 } a, b \text{ 的值, 使函数 } f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x > 0 \\ b(1-x^2), & x \leq 0 \end{cases} \text{ 处处可导。}$$

$$4. \text{设函数 } \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 1 - \arctan t \end{cases}, \text{求 } \frac{dy}{dx} \text{ 及 } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$5. \text{设方程 } \sin(xy) + \ln(y-x) = x \text{ 确定 } y = y(x), \text{ 求 } y'(0)$$

6. 设 $y = x^{\sin x}$, 求 dy

四、综合题（本题共 2 小题，第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分，应写出具体解题过程）

1. 设曲线 $f(x) = x^n$, 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n, 0)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

2. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处有极值 -2 , 试确定系数 a, b 的值, 并求出

(1) 单调区间及极值; (2) 凹凸区间及拐点。

五、证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1. 当 $x > y > 0$ 时, 证明 $\ln \sqrt{xy} < \ln \frac{x+y}{2}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $0 < a < b$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)。$$

（提示：用拉格朗日中值定理和柯西中值定理）

4 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、当 $x \rightarrow 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪个是比其余三个更高阶的无穷小量（ ）。

- A. x^2 B. $1 - \cos x$ C. $\sqrt{1-x^2} - 1$ D. $x - \tan x$

2、函数 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 的零点大致在区间（ ）上。

- A. (1,2) B. (2,3) C. (3,4) D. $(e, +\infty)$

3、点 $x=0$ 是函数 $y = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{3^x} + 1}$ 的（ ）。

- A. 连续点 B. 跳跃间断点 C. 可去间断点 D. 第二类间断点

4、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，周期为 4，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为（ ）。

- A. $\frac{1}{2}$ B. 0 C. -1 D. -2

5、若二次可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = 1$ ，则（ ）。

- A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点 B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
C. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点 D. $(a, f(a))$ 是 $f(x)$ 的一个拐点

6、曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的渐近线共有（ ）。

- A. 0 条 B. 1 条 C. 2 条 D. 3 条

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 5}{x-1} + ax + b \right) = 3$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2、计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\frac{1}{x}} = e$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4、设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5、设 $y = \frac{1-x}{1+x}$ ，则 $y^{(n)} =$ _____.

6、函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_____.

三、计算题（本题共 5 小题，每题 5 分，满分 25 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)}$.

3、已知 $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$ ，求 dy .

4、求出 a, b 的值，使得函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x < 0 \\ ax+b, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点可导.

5、计算由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{3}}$ 。

四、综合题（本题共 3 小题，每第 1 题 6 分，共 18 分，应写出具体解题过程）

1、求函数 $y = x^3 - 3x^2 + 9$ 的单调区间、极值及其图形的凹凸区间和拐点。

2、讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^3 e^{nx}}{x + e^{nx}}$ 的连续性（ n 为正整数）。

5 浙江理工大学 2017—2018 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、设 $f(x)$ 可导， $f(x)f'(x) > 0$ ，则（ ）。

- A. $f(1) > f(-1)$ B. $f(1) < f(-1)$
C. $|f(1)| > |f(-1)|$ D. $|f(1)| < |f(-1)|$

2、设数列通项为 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\{x_n\}$ 是（ ）。

- A. 无穷大量. B. 无穷小量. C. 有界变量. D. 无界变量

3、下列各式中正确的是（ ）。

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1.$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1.$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = -e.$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{-x} = e.$

4、已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$ 则（ ）。

- A. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.
B. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.
C. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.
D. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

5、设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为

$f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$ ，则（ ）。

- A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$
C. $\Delta y < dy < 0$ D. $dy < \Delta y < 0$

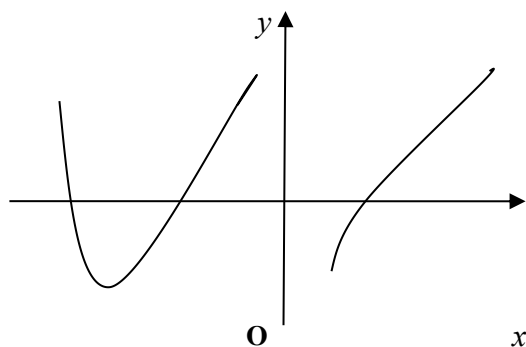
6、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导数的图形如图一所示，则 $f(x)$ 有（ ）。

- A. 一个极小值点和两个极大值点.

B.两个极小值点和一个极大值点.

C.两个极小值点和两个极大值点.

D.三个极小值点和一个极大值点.



(图一)

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、设 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt[3]{1-x^3} - ax - b) = 0$ ，则 $a =$ _____， $b =$ _____.

2、当 $x \rightarrow 0^+$ 时，若 $\ln^a(1+2x)$ ， $(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 a 的取值范围是_____.

3、函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_____.

4、设 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$ ，则 $f'(x)$ 的零点的个数为_____.

5、已知 $f'(2) = 2$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{2h} =$ _____.

6、函数 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 图形的渐近线有_____.

三、计算题（本题共 6 小题，每题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$.

2、极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

3、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$.

4、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos xy = 0$ 确定，求 dy .

5、设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$, 其中 $f''(t)$ 存在且不为零, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6、求 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x > 0 \\ b(1-x^2), & x \leq 0 \end{cases}$ 处处可导。

四、综合题（本题共 2 小题，第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分，应写出具体解题过程）

1、设 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x|(x^2 - 4)}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点的类型。

2、试确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的系数 a, b, c, d ，使得曲线过点 $(-2, 44)$ ，且在点 $x = -2$ 处曲线有水平切线，点 $(1, -10)$ 为曲线的拐点，并指出曲线的单调区间和凹凸区间。

五、证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1、设 $b > a > e$ ，证明： $a^b > b^a$ 。

2、设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a) = f(b) = 0$ ， $f'(a)f'(b) > 0$ ，证明存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$ ，使 $f(\xi) = 0$ 及 $f''(\eta) = 0$ 。

6 浙江理工大学 2016—2017 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = (1 - \cos x) \ln(1 + 4x^2)$ 与下列哪个函数是同阶无穷小（ ）

- A. x^3 B. x^5 C. x^4 D. x^2

2、下列说法正确的是（ ）

- A. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不可微，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 极限不存在
B. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不可导，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续
C. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导
D. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不可导

3、 $x = 1$ 是函数 $y = \frac{x-1}{\sin \pi x}$ 的（ ）

- A. 可去间断点 B. 无穷间断点 C. 震荡间断点 D. 跳跃间断点

4、设 $f'(1) = 2$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(1)}{x-1} =$ （ ）

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 0

5、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续并在开区间 (a, b) 内可导，如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$ ，那么必有（ ）

- A. 在 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$ B. 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 单调增加
C. 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 单调减少 D. 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 是凸函数

6、若 $f'(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f'(a) > 0$ ， $f'(b) < 0$ ，则下列结论中错误的是（ ）

- A. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) > f(b)$
B. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) > f(a)$
C. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) = 0$
D. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-f(x)}{x-2} = -2$ ，则 $f'(2) =$ _____

2、函数 $f(x) = \frac{4}{2-x^2}$ 的铅直渐近线是 _____，水平渐近线是 _____

3、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) =$ _____

4、函数 $y = x - \ln(1+x)$ 的单调减区间为 _____

5、设函数 $y = 2e^{x^2} \cos x$ ，则函数的微分 $dy =$ _____

6、若 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{3}{x}} = 8$ ，则 $a =$ _____

三、计算题（本题共 6 小题，每题 5 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sin 2x}$

2、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \arctan x}$

3、设 $y = e + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

4、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xy = e^{x+y}$ 所确定，求 y'

5、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定，试求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

6、求 a, b 的值，使函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x > 0 \\ ax+b & x \leq 0 \end{cases}$ 处处可导

四、综合题（本题共 2 小题，第 1 题 6 分，第 2 题 8 分，共 14 分，应写出具体解题过程）

1、求曲线 $y = \frac{1}{x} + x^2$ 在拐点处的切线方程

2、描绘函数 $y = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形

五、证明题（本题共 2 小题，每题 4 分，满分 8 分）

1、试证明：当 $x > 0$ 时有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

2、若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明: 在 $(0,1)$

内至少有一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 1$

（注：乱码部分为“(0,1)”）

7 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（6 小题×4 分=24 分）

1、当 $x \rightarrow 0^+$ 时，与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是（ ）

- A. $\tan \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}$ B. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ C. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

2、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（ ）

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$ ；
B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$ ；
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在；
D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在。

3、判断函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$ 有（ ）

- A. 1 个可去间断点，一个跳跃间断点； B. 2 个跳跃间断点；
C. 1 个可去间断点，1 个无穷间断点； D. 2 个无穷间断点。

4、若 $f'(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$ ，则下列结论中错误的是（ ）

- A. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) > f(a)$ ；
B. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) > f(b)$ ；
C. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$ ；
D. 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi) = 0$ 。

5、设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，则（ ）

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；
B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；
C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点；
D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值， $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

6、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

A. 极限不存在; B. 极限存在, 但导数不存在; C. 连续, 但不可导; D. 可导。

二、填空题 (6 小题 \times 4 分 = 24 分)

1、设 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{e^x-b}{x-1}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续, 则 $a=$ _____, $b=$ _____;

2、设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, f'(1)=2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{1+x}-1)}{f(e^x-x)} =$ _____;

3、设 $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$, 则函数的微分 $dy =$ _____;

4、设 $x = g(y)$ 是单调连续函数 $y = f(x)$ 的反函数, 且 $f(1)=2, f'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $g'(2)=$ _____.

5、函数 $y = \ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ _____.

6、函数 $f(x) = |4x^3 - 18x^2 + 27|$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最小值为_____, 最大值为_____.

三、计算题 (5 小题 \times 5 分 = 25 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

2、设 $y = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

3、求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ，其中 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ 。

4、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定，求 y', y'' 。

5、求曲线 $y = \frac{x+9}{x+5}$ 过原点的切线。

四、解答题（2 小题 \times 6 分 = 12 分）

1、若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶导数连续，且 $f(0) = 0$ ，考虑函数 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ ，

（1）确定 a 值，使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续；

（2）对于所求的 a 值，证明 $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

2、已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处有极值-2，试确定系数 a, b 的值，并求出

(1) 单调区间及极值；(2) 凹凸区间及拐点。

五、数学建模题（本题 7 分）

水从高 18cm、开口半径为 6cm 的圆锥形漏斗流入半径为 5cm 的圆柱形桶内。已知某时刻漏斗中水深 12cm，漏斗水面下降的速度为 1cm/s，求此时圆桶中水面上升的速度。（提示：假设漏斗水深为 x cm 时桶的水深为 y cm）

六、证明题（2 小题 \times 4 分=8 分）

1、设 $0 < a < b$ ，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，

使得 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ 。

2、证明 $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$ 仅有两个实根。

8 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{(1+x)x^2}, & x < 0 \\ \frac{x-1}{x^2+x-2}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 的间断点有（ ）

- A. $x=1, x=-1$ B. $x=0, x=1$ C. $x=0, x=-1$ D. 没有

2、数列 $\{a_n\}$ 无界是数列发散的（ ）

- A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

3、当 $x \rightarrow 0$ 时， $\ln(1+x^2)(1-\cos \sqrt{x})$ 是 $x \sin x^2$ 的（ ）

- A. 高阶无穷小 B. 同阶无穷小 C. 等价无穷小 D. 低阶无穷小

4、设 $f(x)$ 为可导函数，则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x)-f(1)}{x-1} =$ （ ）

- A. $-f'(x-1)$ B. $f'(-1)$ C. $-f'(1)$ D. $f'(2)$

5、设 $0 < a < b$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} =$ （ ）

- A. 0 B. 1 C. a D. b

6、设 $f(x) = -f(-x)$ ，且在 $(0, +\infty)$ 内二阶可导，又 $f'(x) > 0$ ， $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的单调性和凹凸性是（ ）

- A. 单调增，凹 B. 单调减，凹 C. 单调增，凸 D. 单调减，凸

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、曲线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在顶点处的曲率为_____。

2、若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a$ (a 为有限数)，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x} =$ _____。

3、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2xe^x)^{\frac{1}{x}} =$ _____。

4、 $y = x^2 e^x$ ，则 $y^{(20)} =$ _____。

5、设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 且 $f(x)$ 可导，则 $df(x) =$ _____。

6、曲线 $y = \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e}$ 的铅直渐近线是_____。

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ 。

2、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

3、已知 $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$ ，求 y' 。

4、设函数 $y(x)$ 由方程 $\ln y = 2 - ye^x$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

5、设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ ，其中 $f''(t)$ 存在且不为零，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

四、解答题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分，应写出具体解题过程）

1、设 $f(x)$ 是 x 的四次多项式函数，已知它在 $x = -1$ 处有极值 -11 ， $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，且在点 $(2,16)$ 处的切线平行于 x 轴，求 $f(x)$ 。

2、若 $f(x) = \begin{cases} b(1 + \sin x) + a + 2, & x > 0 \\ e^{ax} - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可微，试求 a, b 的值，并写出 $f(x)$ 的导函数。

五、数学建模题（本题 5 分，应写出具体建模和求解过程）

货车以速度 x 公里/小时，行驶 200 公里，按交通法规限制 $50 \leq x \leq 100$ 。假设柴油的价格为 7 元/升，而货车耗油的速率是 $\left(5 + \frac{x^2}{700}\right)$ 升/小时，司机的工资是 29 元/小时，试问最经济的车速是多少？这次行车的总费用是多少？

六、证明题（本题共 2 小题，第 1 小题 3 分，第 2 小题 5 分，满分 8 分）

1、证明方程 $\ln x = \frac{1}{2} - x$ 至少有一个不超过 1 的正根。

2、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 1$ ，试证： $\xi, \eta \in (a, b)$ ，使 $e^{\eta - \xi} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ 。

9 浙江理工大学 2011—2012 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 设数列 x_n 和 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则 ()

(A) x_n 收敛, y_n 必发散;

(B) x_n 无界, y_n 必有界;

(C) x_n 有界, y_n 必为无穷小;

(D) $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, y_n 必为无穷小;

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} =$ ()。

(A) $\frac{1}{6}$;

(B) $\frac{1}{3}$;

(C) $\frac{1}{2}$;

(D) $\frac{4}{3}$;

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中, 与 x 不等价的是 ()。

(A) $e^x - 1$;

(B) $\tan x$;

(C) $\sqrt{1+x} - 1$;

(D) $\ln(1+x)$;

4. 设 $f(x)$ 为可导函数, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2-x) - f(1)}{x-1} =$ ()。

(A) $-f'(x-1)$;

(B) $f'(-1)$;

(C) $-f'(1)$;

(D) $f'(2)$;

5. 函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 ()。

(A) 处处单调减少;

(B) 具有最小值;

(C) 处处单调增加;

(D) 具有最大值;

6. 下面说法正确的是 ()

(A) 函数在某点连续一定在该点可导;

(B) 函数在某点不可导一定在该点不连续;

(C) 函数在某点不可导一定在该点连续;

(D) 函数在某点可导一定在该点连续;

二 填空(每题 4 分共 24 分, 请将正确的答案填在空格内)

1 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1-x} = 5$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

2 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 4$, 则 $c =$ _____。

3 函数 $f(x) = \frac{x \ln(x+3)}{x^2 + 3x + 2}$ 的可去间断点为 _____。

4 设 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{3} f'(x_0)$, 则 $k =$ _____。

5 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内二阶可导, 则弧微分 $ds =$ _____,

曲率 $K =$ _____。

6. 函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x \sin x)$, 则 $dy =$ _____。

三 简答题（每题 6 分共 30 分）

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \right)$ 。 2. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$ 。

3. $x^{\frac{1}{y}} = y^{\frac{1}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dx}{dy}$ ($x \neq \frac{1}{e}$, $y \neq \frac{1}{e}$)。

4. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{\sin 2x}$ 。

5. 计算由 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$ 参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

6. 求曲线 $y = \frac{1}{x} + x^2$ 在拐点处的切线方程。

四. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 1 \\ \frac{4}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 在其定义域内处处可导，试求 a, b 的值，并写出 y' 的表达式。(6

分)

五. 设 $y = e^x(x^2 + 2x + 2)$ ，求 $y^{(n)}$ 。(6 分)

六. 描绘函数 $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形。 (6 分)

七. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数, $f''(x) > 0$, 试证: 对

$\forall \lambda \in (0,1), \forall x_1, x_2 \in (a,b)$, 有 $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 。 (4 分)

10 浙江理工大学 2010—2011 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1、函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + 1$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2、设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ ，有关函数间断点的正确结论为（ ）

- A. 存在间断点 $x = 1$ B. 不存在间断点
C. 存在间断点 $x = 0$ D. 存在间断点 $x = -1$

3、设函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 $x = \frac{\pi}{2}$ 连续，又 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{\cos x} = -1$ ，则（ ）

- A. $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的极大值点 B. $x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值点
C. $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 是 $f(x)$ 的拐点 D. $x = \frac{\pi}{2}$ 非极值点，且 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 也非拐点

4、函数 $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$ 在下列区间上不满足拉格朗日中值定理条件的是（ ）

- A. $[0, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $\left[0, \frac{27}{8}\right]$ D. $[-1, 0]$

5、函数 $f(x)$ 在 a 点的去心领域内有界，是极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在的（ ）

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

6、当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = (1 - \cos x) \ln(1 + 2x^2)$ 与下列哪个函数是同阶无穷小（ ）

- A. x^3 B. x^5 C. x^4 D. x^2

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1、抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在顶点处的曲率是_____

2、函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t(1 + \sin t) \\ y = t \cos t \end{cases}$ 确定，则 $y'|_{t=\pi} =$ _____

3、 $y = x^2 \sin x$ ，则 $y^{(2009)}(0) =$ _____

4、设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x - 1} = A$ ，则 $a =$ _____， $A =$ _____

5、曲线 $y = \ln x$ 上一点 P 的切线经过原点，则点 P 的坐标为_____

6、 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的铅直渐近线是_____

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分，应写出演算过程及相应文字说明）

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2}}}{x}$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)}$

3、已知 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ ，求 y'

4、 $y(x)$ 由方程 $y = \tan(x+y)$ 确定，求 y''

5、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{a \ln(1+x)}{x}, & x > -1, x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=1$ ，求常数 a, b 的值

四、求函数 $y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ 的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数的图形。（本题 10 分）

五、设抛物线 $y = 4 - x^2$ 上有两点 $A(-1, 3)$ ， $B(3, -5)$ ，在弧 AB 上，求一点 $P(x, y)$ 使三角形 ABP 的面积最大。（本题 6 分）

六、证明题（本题共两小题，每题 3 分，满分 6 分）

1、证明当 $x > 0$ 时， $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$

2、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可微，且 $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：对 $\forall \lambda \in R$ ， $\exists c \in (a, b)$ ，

使得 $f'(c) = \lambda f(c)$

11 浙江理工大学 2009—2010 学年第 1 学期《高等数学 A1》期中试题

一 选择题（每小题 4 分，共 28 分）

1. 当 $x \rightarrow a$ 时， $f(x)$ 是（ ），则必有 $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)f(x) = 0$

- A. 任意函数 B. 无穷小量 C. 无界函数 D. 无穷大量

2. 设函数 $f(x) = (1-x)^{\cot x}$ ，则定义 $f(0)$ 为（ ）时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

- A. $\frac{1}{e}$ B. e C. $-e$ D. 无论怎样定义 $f(0)$ ， $f(x)$ 在 $x=0$ 也不连续。

3. 下列等式成立的是（ ）

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

4. 若 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 1+x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ （ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{5}{3}} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x=0$ 处 $f(x)$ （ ）

- A. 不连续 B. 连续，但不可导 C. 可导，但导数不连续 D. 可导，且导数连续

6. 设 $f(x) = -f(-x)$ ，且在 $(0, +\infty)$ 内二阶可导，又 $f'(x) > 0$ ， $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的单调性和图形的凹向是（ ）

- A. 单调增，向上凹 B. 单调减，向上凹 C. 单调增，向上凸 D. 单调减，向上凸

7. 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 1$ ，则 $f(x) =$ _____.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{(x-1)(x+2)} =$ _____.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > 1 \\ x^3, & x \leq 1 \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a =$ _____， $b =$ _____.

4. 要使函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ 在 $x=0$ 处连续，则须定义 $f(0)$ 的值为_____.

5. 设函数 $f(x)$ 当 $x \neq 0$ 时满足 $f(x^3) + 2f\left(\frac{1}{x^3}\right) = 3x$, 则 $f'(1) =$ _____.

二、试解下列各题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x)] \tan 3x}{x \sin 2x}$

2. 求极限： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$

3. 设 $\begin{cases} x = a(\sin t - t \cos t) \\ y = a(\cos t + t \sin t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. 已知 $y = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$, 求 dy

三、证明题

(1) (4 分) 当 $x > 0$ 时, 则 $e^x > 1+x$

(2) (4 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ 。证明: 对任意正整数 a, b ,

必存在 $(0,1)$ 内的两个数 ξ 与 η , 使 $\frac{a}{\varphi'(\xi)} + \frac{b}{\varphi'(\eta)} = a+b$

五、(5 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, 对于 $[0,1]$ 上的每一个 x , 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内, 且 $f'(x) \neq 1$, 证明在开区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$

六、(10 分) 求函数 $y = \frac{(x+1)^2}{x}$ 的定义域、单调区间、极值、曲线的凹凸区间以及渐近线并作图。