浙江理工大学 2017 —2018 学年第一学期

《 高等数学 B 》期末试卷（ A ）卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：__________ 学号：______________ 班级：_______________ 座位号________

一．选择题：（3 分 / 题，共 18 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+3}(4-\cos x)=$（　　　　　）.

A.0　　　　B. $\dfrac{2}{3}$　　　　C. ∞　　　　D.不存在也不 ∞

2. 设函数 $f(x)$ 在 x 处可导，a,b 为常数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+a\cdot\Delta x)-f(x-b\cdot\Delta x)}{\Delta x}=$（　　）.

A. $f'(x)$　　B. $(a-b)f(x)$　　C. $(a+b)f'(x)$　　D. $f'(a)-f'(b)$

3. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极大值，则必有（　　　　　）.

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f''(x_0)<0$　　C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)=0$ 或不存在

4．设 $F'(x)=f(x)$，即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\int\dfrac{f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=$（　　　　　）.

A. $-F(\sqrt{x})+C$　　B. $-2F(-\sqrt{x})+C$　　C. $\dfrac{1}{2}F(-\sqrt{x})+C$　　D. $-\dfrac{1}{2}F(-\sqrt{x})+C$

5．设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　　　）.

A.高阶无穷小　　B.低阶无穷小　　C.同阶但不等价无穷小　　D.等价无穷小

6. 下列反常积分发散的是（　　　　　）.

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$（$p>1$）　B. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$　C. $\int_0^1\dfrac{dx}{x(x+1)}$　D. $\int_1^e\dfrac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

二．填空题：（3 分 / 题 共 18 分）

1． $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x}\sin x)=$________________

2．设 $f(\sqrt{x})=\arctan x$，则 $f'(x)=$________________________.

3．函数 $y=x\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上，使拉格朗日定理成立的 $\xi=$_________

4. 已知 $\arctan\sqrt{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$__________________________.

5. 函数 $y=x+2\cos x$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为______________.

6. 定积分$\int_{-1}^{1}\left(xe^{x^4}+x^2\right)dx=$ ____________________________.

三．计算题：（6 分 / 题　共 30 分）

1. 讨论$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$是否存在？若存在求其值。

2．若 $p(x)=\int_{x}^{3x}f(x-2t)dt$，其中 $f(x)$ 是一阶可导函数，求$\dfrac{dp}{dx}$，$\dfrac{d^2p}{dx^2}$.

3. 求$\int\dfrac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

4．$f(x)=\begin{cases}x^2e^{-\frac{x^2}{2}},x>0\\ x\sin x,x\le 0\end{cases}$，求$df|_{x=0}$.

5. 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx.$

四 .综合题:(每小题 10 分，共 20 分)

1. 抛物线 $y = 4x - x^2$

（1）抛物线上哪一点处切线平行于 x 轴？写出切线方程。

（2）求抛物线与水平切线及 y 轴所围平面图形的面积。

（3）求该平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积。

2．已知函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 处有极值，试求 a,b 的值，并求 $f\left(x\right)$ 的拐点的横坐标。

五．证明题（6 分+8 分， 共 14 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续且 $f(x)>0$. 证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在（0，1）内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，试证：

（1）存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\eta)=\eta$.

（2）对任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

浙江理工大学 20 17 —2018　学年第 一 学期

《　高等数学 B　》期末试卷（ A ）卷标准答案和评分标准

一、选择题（本题共有 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. A.　　2. C.　　3. D.　　4. B.　　5. C.　　6. C.

二. 填空题:(每空 3 分, 共 18 分)

1. 2　　2. $\dfrac{2x}{1+x^4}$　　3. $\xi = e^{\frac{1}{e-1}}$，　4. $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)} - \arctan\sqrt{x} + c$　　5. $\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$　　6. $\dfrac{2}{3}$

三. 计算题:(每题 6 分，共 30 分)

1. 解:　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$，

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0, \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$，　……….4 分

所以 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$　……….6 分

2. 解:　$p(x) \overset{u=x-2t}{=} -\dfrac{1}{2}\int_{-x}^{-5x} f(u)du = \dfrac{1}{2}\int_{-5x}^{-x} f(u)du$　……….2 分

$\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{1}{2}(-f(-x)+5f(-5x))$，　……….4 分

$\dfrac{d^2p}{dx^2} = \dfrac{1}{2}f'(-x) - \dfrac{25}{2}f'(-5x)$　……….6 分

3. 解: 设 $x = t^6$，于是 $dx = 6t^5 dt$　，　则　……….1 分

$\int \dfrac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \dfrac{6t^5 dt}{\left(1+t^2\right)t^3} = \int \dfrac{6t^2 dt}{\left(1+t^2\right)}$　……….3 分

$= 6\int\left(1-\dfrac{1}{1+t^2}\right)dt = 6t - 6\arctan t + C$　……….5 分

$= 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\sqrt[6]{x} + C.$　……….6 分

4. 解:　$f'_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2 e^{-\frac{h^2}{2}}}{h} = 0$，　……….2 分

$f_-'(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h\sinh}{h}=0$， ……….4 分

故 $f'(0)=0$，所以 $dy|_{x=0}=0\cdot dx=0$. ……….6 分

5. **解** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{1+\cos 2x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\cos^2 x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\tan x=\dfrac{1}{2}x\tan x|_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx$

……….4 分

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(-\ln|\cos x|)|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}.$$ ……….6 分

四.综合题:(每小题 10 分，共 20 分)

1、（1）切线方程： $y=4$ ……….2 分

（2） $S=\int_0^2(4-(4x-x^2))dx=\dfrac{8}{3}$ ……….6 分

（3） $V=V_1-V_2=\pi\times 4^2\times 2-\pi\int_0^2(4x-x^2)^2dx=32\pi-\dfrac{256}{15}\pi=\dfrac{224}{15}\pi$ ………10 分

2、解： $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$, 题意知 $f'(1)=0$， $f'(2)=0$， ……….3 分

得： $\begin{cases}a+2b+1=0\\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0\end{cases}$，解得： $a=-\dfrac{2}{3},b=-\dfrac{1}{6}$， ……….5 分

$f''=-\dfrac{a}{x^2}+2b=\dfrac{2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}=0$, 解得 $x=\pm\sqrt{2}$（负号舍去）。 ……….8 分

当 $0<x<\sqrt{2}$， $f''(x)>0$，向上凹， 当 $x>\sqrt{2}$ 时， $f''(x)<0$，向上凸，

故 $x=\sqrt{2}$ 为 $f(x)$ 的拐点的横坐标。 ……….10 分

五．证明题（6+8=14 分）

1. 解： $F'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\dfrac{f(x)\int_0^x\left[xf(t)-tf(t)\right]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}$. ……….3 分

由于积分中 $0<t<x$, 且 $f(x)>0$. 所以，分子中

$$\int_0^x\left[xf(t)-tf(t)\right]dt=\int_0^x\left(x-t\right)f(t)dt>0$$ ……….5 分

则 $F'(x)>0$. 因而 $F(x)\uparrow$. ……….6 分

2.证明：（1）令 $\Phi(x)=f(x)-x$，显然它在[0, 1]上连续，又 $\Phi(1)=-1<0, \Phi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$，根据零点定理，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $\Phi(\eta)=0$ 即 $f(\eta)=\eta$. ……….4 分

（2）令 $F(x)=e^{-\lambda x}\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，它在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(0,\eta)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$e^{-\lambda\xi}\{f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]-1\}=0$，从而 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$. ……….8 分